21世纪高职高专"十二五"规划教材

一元函数微积分典型题型及解题技巧

YIYUANHANSHU WEIJIFEN DIANXING TIXING JI JIETIJIQIAO

许 军/编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

21 世纪高职高专“十二五”规划教材

一元函数微积分典型题型及解题技巧

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书根据《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》一元函数微积分部分编写，全书共九章，包括函数定义及其性质的应用、极限的求法、函数连续性的判断与应用、导数的计算、中值定理与导数应用、不定积分的计算、定积分的计算、定积分的应用以及常微分方程解法等内容，精选了这些内容中的典型题型，并给出了详尽的分析和具体解法.

本书可作为高职高专工科类各专业习题课教材，也可供经管类专业使用，还可作为“专升本”及学历文凭考试的参考书及相关学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

一元函数微积分典型题型及解题技巧/许军编. —天津：天津大学出版社，2010. 10

21 世纪高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5618-3478-7

Ⅰ.①一… Ⅱ.①许… Ⅲ.①微积分－高等学校：技术学校－教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 193944 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话 发行部：022-27403647 邮购部：022-27402742
网　　址 www. tjup. com
印　　刷 肃宁县科发印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 9
字　　数 186 千
版　　次 2010 年 10 月第 1 版
印　　次 2010 年 10 月第 1 次
定　　价 16. 00 元

前　　言

随着经济和科学技术的进步，数学对于当代科学乃至整个社会的影响和推动作用日益显著. 数学成为科学研究的主要支柱：数学方法及计算已经与理论研究和科学实验同样成为科研中不可缺少的有效手段. 同时，现代数学几乎已经渗透到包括自然科学、工程技术、经济管理以至人文社会科学的所有学科和应用领域中，从宇宙飞船到家用电器、从质量控制到市场营销，通过建立数学模型、应用数学理论和方法解决实际问题成为十分普遍的模式. 这一切都对科学技术人才的数学素质和能力提出了更新更高的要求.

数学习题课作为近年来大学数学教学改革中的一门新型课程，诞生的时间并不长，却引起十分广泛的兴趣和关注. 它最早在上世纪 80 年代末出现于美国的一些大学，被称为“数学实验室”. 我国高校在上世纪 90 年代中期开始设置“数学习题”课，发展极为迅速，目前许多学校已经或准备开设这门课.

数学习题课的设立，首先提高了学生在教学过程中的参与程度，学生的主观能动性在习题课中能得到相当充分的发挥，能引起学生学习数学知识和方法的强烈兴趣并激发他们自己去解决相关实际问题的欲望，因此数学习题课有助于促进独立思考和创新意识的培养.

其次，数学习题课让学生了解和初步实践应用数学知识和方法解决实际问题的全过程，它还反映了学生对数学原理、数学方法、建模方法等多方面内容的掌握程度和应用的能力. 因此数学习题课有助于促进在实际工作中非常需要的综合应用能力的培养.

另外，数学习题课可以将先进的技术工具引进教学过程，不止是作为一种教学辅助手段，而且是作为解决问题的主要途径. 因此数学习题课有助于促进数学教学手段现代化和让学生掌握先进的数学工具.

从这些方面可以看出：数学习题课并非是一种应景点缀的时髦课程，它的产生符合教育改革的方向，是很具生命力的新型课程. 要求学生全面地掌握高等数学所涉及的基本概念，基本理论和基本运算能力的技巧，具有高职高专学习所必须的抽象思

维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

本书参考了很多专家关于数学习题课的论述和专著,根据编者多年教学经验,对高职高专数学课程中的一元函数微积分的典型题型及解题技巧做了归纳和总结,可以作为高职高专院校开设数学习题课的参考教材,也可以作为学生自主学习一元函数微积分知识必要的补充资料.

由于编者水平有限,且时间较为仓促,书中疏漏之处在所难免,敬请各位专家和使用者批评指正.

编者

2010年3月于酒泉职业技术学院

目　录

第一章　函数定义及其性质的应用

一、函数的对应关系与函数值的求法

1. $y=f(x+1)=x^2+x-1$，求$f(x)$，$f(2)$，$f(x+1)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(f(x))$.

解　令$x+1=t$，则$x=t-1$，代入原函数有

$$f(t)=(t-1)^2+(t-1)-1=t^2-t-1,$$

故

$$f(x)=x^2-x-1,f(2)=2^2-2-1=1,$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)-1=x^2+x-1,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x}-1=\frac{1-x-x^2}{x^2},$$

$$f(f(x))=(f(x))^2-f(x)-1=(x^2-x-1)^2-(x^2-x-1)-1$$
$$=x^4-2x^3-2x^2+3x+1.$$

2. 设函数$f(x)=e^x$，为使$f(\varphi(x))=1-x^2$，求$\varphi(x)$.

解　因为$f(x)=e^x$，则$f(\varphi(x))=e^{\varphi(x)}$，由$f(\varphi(x))=1-x^2$，就有$e^{\varphi(x)}=1-x^2$. 两边同时取自然对数，就有$\ln e^{\varphi(x)}=\ln(1-x^2)$，即$\varphi(x)=\ln(1-x^2)$.

3. 若$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0,\end{cases}$求$f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(x-1)$.

解　这是分段函数的对应关系及函数值的求解问题，在$f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$中，明确给出了自变量的取值，此类题型解答时，要根据函数的分段点，判断所要计算函数值的自变量位于函数定义域的哪一取值区间，然后选择函数对应的表现形式计算函数值即可.

当$x=0$时，对应$f(x)$的表现形式为$f(x)=0$，所以$f(0)=0$；$x=-1$时，对应$f(x)$的表现形式为$f(x)=0$，所以$f(-1)=0$；$x=2$时，对应$f(x)$的表现形式为$f(x)=e^x$，所以$f(2)=e^2$.

而对于$f(x-1)$，没有给出自变量的确定取值，我们无法判断$x-1$的取值范围，此类问题解答时，只需将原来函数中的自变量用所求函数值中的变量代换即可. 如要计算$f(x-1)$的值，只需将$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0\end{cases}$中的$x$用$x-1$代换即可，即有$f(x-1)=\begin{cases}0, & x-1\leqslant 0,\\ e^{x-1}, & x-1>0,\end{cases}$此时还需注意将分段函数中的变量$x-1$的两个不等式解出，就有

$$f(x-1)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1,\\ e^{x-1}, & x>1.\end{cases}$$

4. 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=e^x$,求$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1,\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0;\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \frac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$$

5. 设$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0,\end{cases}$求$f(x-1)+f(x+1)$.

解 $f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1,\\ x^2-2x+5, & x<1;\end{cases}$ $f(x+1)=\begin{cases}2x+3, & x\geqslant -1,\\ x^2+2x+5, & x<-1;\end{cases}$

故 $$f(x-1)+f(x+1)=\begin{cases}2x^2+10, & x<-1,\\ x^2+8, & -1\leqslant x<1,\\ 4x+2, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

6. 已知$f(x)$是二次多项式,且$f(x+1)-f(x)=8x+3$,求$f(x)$.

解 设$f(x)=ax^2+bx+c$,由$f(x+1)-f(x)=8x+3=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2ax+a+b$,得$2a=8$,$a+b=3$,即$a=4$,$b=-1$,

所以 $f(x)=4x^2-x+c$.

二、函数定义域的求法

自变量在分母上,例如$\frac{1}{x}$,这时要求$x\neq 0$;函数中出现$\sqrt[2n]{x}$时,则要求$x\geqslant 0$;函数中含有$\ln x$或$\log_a x$时,要求$x>0$;函数中含有$\tan x$或$\sec x$时,要求$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$;含有$\cot x$或$\csc x$时,要求$x\neq k\pi$;函数中出现$\arccos x$或$\arcsin x$时,要求$-1\leqslant x\leqslant 1$.

当然,在给出的定义域求解题例中,未必每道题都是上述六类常见问题的单一模式,恰恰相反,几乎每种题例都包含了其中的两种或两种以上的函数表现形式,此时只需要给出在单一模式下每种表现形式的定义域,然后联立求不等式的解集,得到的就是所给题例的定义域.还需要指出的是,上述六类常见函数中的自变量x在具体的问题中可以变换为x的函数,例如$\frac{1}{x}$可以变换为$\frac{1}{x+2}$、$\frac{3}{(1-x)\cos 2x}$、$\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$等各种形式,此时,只需要把对形如$\frac{1}{x}$时的要求$x\neq 0$分别变换为形如$\frac{1}{x+2}$、$\frac{3}{(1-x)\cos 2x}$、

$\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$时的对应要求，即分别为 $x+2\neq0$、$(1-x)\cos 2x\neq0$、$\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\neq0$ 就可以，然后再对变换出的不等式求解. 其他类型的变换同理.

1. 求函数 $y=\frac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域.

分析：本题中所给函数由上述六类常见函数类型中的$\frac{1}{x}$、$\sqrt[2n]{x}$、及 $\ln x$ 等三种单一模式对应的$\frac{1}{\ln(x-1)}$、$\sqrt{x^2-1}$、$\ln(x-1)$三个复合而成，因此分别要求 $\ln(x-1)\neq0$、$x^2-1\geqslant0$、$x-1>0$，上述三个条件必须同时成立. 联立解方程组即可.

解 函数定义域满足下列不等式$\begin{cases}\ln(x-1)\neq0,\\x^2-1\geqslant0,\\x-1>0,\end{cases}$

逐个求解得$\begin{cases}x>1, x\neq2,\\x\geqslant1\text{ 或 }x\leqslant-1,\\x>1,\end{cases}$联立解得 $x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$.

2. 求函数$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant-1,\\2x, & -1<x<2,\\\frac{x^2}{2}, & x\geqslant2\end{cases}$的定义域与值域.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,-1]\cup(-1,2)\cup[2,+\infty)$. 当 $x\leqslant-1$ 时，$f(x)\in(-\infty,1)$，当 $-1<x<2$ 时，$f(x)\in(-2,4)$. 当 $x\geqslant2$ 时，$f(x)\in[2,+\infty)$. 所以$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域也为$(-\infty,+\infty)$.

3. 求函数$f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$的定义域.

解 $x\neq0$ 且 $1-x^2\geqslant0\Rightarrow x\neq0$ 且 $|x|\leqslant1$.

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sin\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $y=\frac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\arccos\ln\frac{x}{10}$；　　(4) $y=\tan(x+1)$；

(5) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；　　(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

解 (1) 要使 $\sin\sqrt{4-x^2}$ 有意义，必须 $4-x^2\geqslant0$，即使 $|x|\leqslant2$.
所以定义域为$[-2,2]$.

(2) 当 $x\neq3$ 且 $x\neq1$ 时，$\frac{1}{x^2-4x+3}$有意义；而要使 $\sqrt{x+2}$有意义，必须 $x\geqslant-2$，故

函数的定义域为$[-2,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$.

(3)要使 $\arccos \ln \frac{x}{10}$有意义,则有 $-1\leqslant \ln \frac{x}{10}\leqslant 1$,即$\frac{1}{e}\leqslant\frac{x}{10}\leqslant e$. 所以$\frac{10}{e}\leqslant x\leqslant 10e$,即函数定义域为$[\frac{10}{e},10e]$.

(4)要使 $\tan(x+1)$有意义,则必有 $x+1\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,即函数定义域为$\{x|\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

(5)当 $x\leqslant3$ 时 $\sqrt{3-x}$有意义;又当 $x\neq0$ 时 $\arctan\frac{1}{x}$有意义,故函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(6)当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$时 $\sqrt{\sin x}$有意义;又要使 $\sqrt{16-x^2}$有意义,必须有 $-4\leqslant x\leqslant4$. 所以函数的定义域为:$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

5. 设$f(x)=\sqrt{x},g(x)=-x^2+4x-3$,求$f[g(x)]$的定义域.

解 $f[g(x)]=\sqrt{-x^2+4x-3}$,因此要使 $\sqrt{-x^2+4x-3}$有意义,必须 $1\leqslant x\leqslant3$,即$f[g(x)]$的定义域为$[1,3]$.

6. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,求$f(\sin x)$的定义域.

解 当 $0\leqslant\sin x\leqslant1$ 时 $f(\sin x)$有意义,故其定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi](k=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

三、判断两个函数是否相同

两个函数相同的条件:对应关系相同;定义域相同;值域相同. 三个条件缺一不可.

1. 判断下列各组函数是否相同.

(1)$y=\ln x^2,y=2\ln x$;

(2)$y=\sqrt{x^2},y=x$;

(3)$y=\arcsin x,y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$;

(4)$y=x\sqrt{1-\cos^2 x};y=x\sin x$.

解 在(1)中,$y=\ln x^2$的定义域为 $x\neq0$,但 $y=2\ln x$ 的定义域为 $x>0$,所以两个函数是不相同的.

在(2)中,$y=\sqrt{x^2},y=x$ 的定义域都是全体实数,但 $y=\sqrt{x^2}$的值域为 $y\geqslant0,y=x$ 的值域为全体实数,所以两个函数不相同.

在(3)中,$y=\arcsin x,y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$ 的定义域都是 $-1\leqslant x\leqslant1$,值域都是全体实数,且对任意 $-1\leqslant x\leqslant1,y=\arcsin x,y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$ 的取值都相同,即对应关系也

相同，因此两个函数相同.

在(4)中，$y=x\sqrt{1-\cos^2 x}$，$y=x\sin x$ 的定义域相同，值域相同，但 $y=x\sqrt{1-\cos^2 x}$；$y=x\sin x$ 对应关系却不相同，因为存在 $x=-\dfrac{\pi}{2}$，此时 $y=x\sqrt{1-\cos^2 x}=-\dfrac{\pi}{2}$，而 $y=x\sin x=\dfrac{\pi}{2}$，所以两个函数的对应关系不相同，因此两个函数是不相等的.

2. 设自变量 $x\in\{1,2,3,4\}$，判断下列数学结构哪些是函数？哪些不是函数？为什么？

$$(1)\ f:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\0&2&1&-1\end{array}$$

$$(2)\ \varphi:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&1&1&1\end{array}$$

$$(3)\ \gamma:\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&0&1&4\end{array}$$

$$(4)\ h:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\\1&2&3&\end{array}$$

答：(1)是，因为对任意 $x\in\{1,2,3,4\}$，按规则 f 有唯一的 y 与之对应.

(2)是，因为对任意 $x\in\{1,2,3,4\}$，按规则 φ 有唯一的 y 与之对应.

(3)不是. 因为对 $x=1\in\{1,2,3,4\}$，有 $y=2$ 与 $y=4$ 两个值与之对应.

(4)不是. 因为对 $x=4\in\{1,2,3,4\}$，没有 y 值与之对应.

四、函数重要性质的应用

单调性：反映了函数图像沿 x 轴正方向的升降.

有界性：反映了函数图像是否在平行于 x 轴的两条直线之间.

奇偶性：反映了函数图像的对称性. 奇函数图像关于原点对称；偶函数图像关于 y 轴对称；

周期性：反映了函数图像是否重复出现.

1. 设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，试证：$f[f(x)]$ 为奇函数，$g[f(x)]$ 为偶函数.

证明　因为 $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$，所以 $f[f(x)]$ 为奇函数.

因为 $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$，所以 $g[f(x)]$ 为偶函数.

2. 证明 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证明 当$|x|\geqslant 1$时，$x^2\leqslant x^4$，因此$\left|\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\right|\leqslant 1$；当$|x|<1$时，$\left|\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\right|\leqslant 1+x^2\leqslant 2$；所以对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant 2$，即$f(x)$有界.

五、反函数法及复合函数的分解与复合

直接函数$y=f(x)$，其直接反函数为$x=\varphi(y)$，其矫形反函数为$y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$. 这时，$x=\varphi(y)$与$y=f(x)$为同一函数. $y=f(x)$，$x=\varphi(y)$，$y=f^{-1}(x)$在同一坐标系中的几何表现是$y=f(x)$与$x=\varphi(y)$在同一坐标系中的图像相同，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$在同一坐标系中的图像关于直线$y=x$对称.

任意两个函数不一定可以复合成一个复合函数，例如：$y=\ln u$与$u=-|x|$两个函数就不可以复合成一个复合函数.

1. 求下列函数的反函数.

(1)$y=\ln(x+2)+1$；　　(2)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

(3)$y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x^3, & x<0.\end{cases}$

解 (1)由$y=\ln(x+2)+1$得$\ln(x+2)=y-1$，即$x+2=e^{y-1}$，$x=e^{y-1}-2$. 所以$y=\ln(x+2)+1$的反函数为$y=e^{x-1}-2$.

(2)由$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$得$2^x=\dfrac{y}{1-y}$，

即 $$x=\log_2\frac{y}{1-y},$$

反函数为$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

(3) 当$x\geqslant 0$时$y\geqslant 1$；$x<0$时，$y<0$.

反函数为$y=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1\\ \sqrt[3]{x}, & x<0.\end{cases}$

2. 将下列函数拆开成若干个基本初等函数的复合.

(1)$y=\sin^3(1+2x)$；　(2)$y=10^{(2x-1)^2}$；　(3)$y=\arctan[\tan(a^2+e^x)]^2$.

解 (1)由$y=u^3$，$u=\sin(1+2x)$有$y=u^3$，$u=\sin v$，$v=1+2x$.

(2)由$y=10^u$，$u=(2x-1)^2$有$y=10^u$，$u=v^2$，$v=2x-1$.

(3)由$y=\arctan u$，$u=(\tan(a^2+e^x))^2$有$y=\arctan u$，$u=v^2$，$v=\tan(a^2+e^x)$；

故 $$y=\arctan u,\ u=v^2,\ v=\tan w,\ w=a^2+e^x.$$

六、函数关系式的建立

1. 一球的半径为r，作外切于球的正圆锥，试将其体积表示为高的函数，并说明定义域.

解 设正圆锥的高为h，底半径为R，体积为V，由立体几何学知：$V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h$. 又

利用两直角三角形相似可得

$$\frac{r}{R}=\frac{h-r}{\sqrt{R^2+h^2}},R^2=\frac{r^2h^2}{h(h-2r)}=\frac{r^2h}{h-2r},$$

所以　$V=\dfrac{\pi r^2h^2}{3(h-2r)},h\in(2r,+\infty).$

2. 一位旅客住在旅馆里，右图 1-1 描述了他的一次行动，请你根据图形给纵坐标赋予某一个物理量后，再叙述他的这次行动. 你能给图 1-1 标上具体的数值，精确描述这位旅客的这次行动并用一个函数解析式表达出来吗？

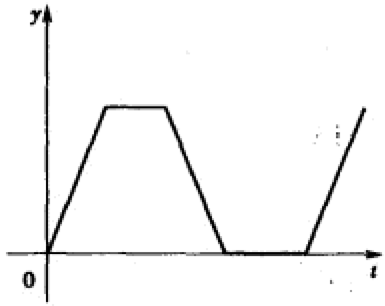


图 1-1

答：设纵坐标 y 为离开旅馆的距离，时间为 t，则右图可描述为：此旅客离开旅馆出外办事，一件事办完后，又回到旅馆，休息一段时间然后再离开旅馆. 标明具体数据如图 1-2 所示，设距离 y 的单位为 km，时间 t 的单位为 h，则这位旅客的这次行动可描述为：他以 2 km/h 的速度出外办事行走 1 h 到达办事处，到达办事处，用 1 h 办完一件事，以同样的速度回到旅馆休息 1 h，又以同样的速度离开旅馆. 行动用函数解析式表达如下：

$$y=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2, & 1<t\leqslant 2,\\ -2t+6, & 2<t\leqslant 3,\\ 0, & 3<t\leqslant 4,\\ 2t-8, & t>4.\end{cases}$$

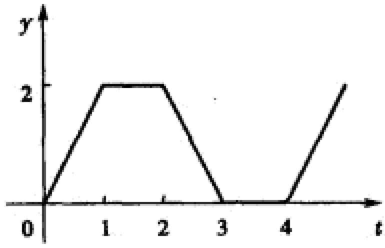


图 1-2

第二章　极限的求法

一、极限的定义及性质应用

在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的定义中，因为$x\to x_0$表示$x$无限接近$x_0$而不等于$x_0$，故$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$f(x)$在点$x_0$有无定义无关.所以只要求$f(x)$在$x_0$的空心邻域$N(\hat{x}_0,\delta)$内有定义.

(一)数列极限定义及性质的应用

1. 判断题：

(1)设在常数a的无论怎样小的ε邻域内存在着$\{x_n\}$的无穷多点，则$\{x_n\}$的极限为a(错).例如$x_n=1+\dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$，$a=\dfrac{3}{2}$.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(对).

(3)设$x_n=0.\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{9}$(对).

2. 用数列极限定义证明.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{4n+3}=\dfrac{1}{2}$；　　　　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

证明　(1)因为$\left|\dfrac{2n-1}{4n+3}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{5}{2(4n+3)}<\dfrac{5}{8n}<\dfrac{1}{n}$，

所以任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{2n-1}{4n+3}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

由定义有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{4n+3}=\dfrac{1}{2}$.

(2)$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，所以任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$，当$n>N$时，$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$.所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

3. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

证明　因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，又$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon(n>N$时)，所以$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，证明$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{x_n}{n^2}=0$.

证明　因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，所以存在$M>0$，有$|x_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，又因为

$\left|n\sin\frac{x_n}{n^2}\right| \leqslant \frac{|x_n|}{n} \leqslant \frac{M}{n}$,所以任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{M}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,有 $\left|a\sin\frac{x_n}{n^2}-0\right| \leqslant \frac{M}{n}$ $<\varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{x_n}{n^2}=0$.

5. 若数列 x_n 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$.

证明 因为 $\{x_n\}$ 有界,所以存在 $M>0$,使得 $|x_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$,所以任给 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时有 $|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,而 $|x_ny_n|=|x_n||y_n|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$.

(二)函数极限的定义及性质

1. 举例说明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的几何意义.

解 例如:对 $y=\frac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ 表示当 x 沿 x 轴的正向远离原点时,曲线 $y=\frac{1}{x}$ 无限靠近直线 $y=0$;$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ 表示当 x 沿 x 轴的负方向远离原点时,曲线 $y=\frac{1}{x}$ 无限靠近直线 $y=0$;$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 表示当 x 沿 x 轴远离原点时,曲线 $y=\frac{1}{x}$ 无限靠近直线 $y=0$.

2. 举例说明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ 的几何意义.

解 例如:对 $y=\frac{1}{x^2}$,$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ 表示当 x 沿 x 轴无限接近 0 时,曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 向上无限远离原点;对 $y=-\frac{1}{x^2}$,$\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$ 表示当 x 沿 x 轴无限接近 0 时,曲线 $y=\frac{-1}{x^2}$ 向下无限远离原点,对 $y=-\frac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ 表示当 x 沿 x 轴负向无限接近 0 时,曲线 $y=-\frac{1}{x}$ 向上无限远离原点;$\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ 表示当 x 沿 x 轴正方向无限接近 0 时,曲线 $y=-\frac{1}{x}$ 向下无限远离原点.

3. 用"$\varepsilon-M$"或"$\varepsilon-\delta$"语言,写出下列各极限的定义.

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$;

(3) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=1$;　　(4) $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=4$.

答:(1)任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使当 $x<-M$ 时,恒有 $|f(x)-2|<\varepsilon$ 成立.

(2)任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使当 $|x|>M$ 时,恒有 $|f(x)+1|<\varepsilon$ 成立.

(3)任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $0<x-2<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-1|<\varepsilon$ 成立.

(4)任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $-\delta<x+2<0$ 时,恒有 $|f(x)-4|<\varepsilon$ 成立.

4. 用定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-1)=1$;　　(4) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$.

证明 (1)任给 $\varepsilon>0$,取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,当 $x>M$ 时,$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$ 成立.所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

(2)因为 $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2|2x-1|}<\dfrac{2}{|2x-1|}<\dfrac{2}{2|x|-1}$. 所以任给 $\varepsilon>0$,取 $M=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\varepsilon}+1\right)$,当 $|x|>M$ 时,有 $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{2}{2|x|-1}<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$.

(3)因为 $|(2x-1)-1|=2|x-1|$. 所以任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当 $-\delta<x-1<0$ 时,有 $|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-1)=1$.

(4)因为 $|\sqrt{x}-2|=\dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}<\dfrac{|x-4|}{2}$,所以任给 $0<\varepsilon<1$ 取 $\delta=2\varepsilon$,当 $0<|x-4|<\delta$ 时,有 $|\sqrt{x}-2|<\dfrac{|x-4|}{2}<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$.

二、极限运算法则及存在准则

1. 是非题,若非,请举例说明.

(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)$ 不存在. (对)

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$ 不存在. (错)

例如:$x_n=\dfrac{1}{n}$,$y_n=\sin n$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在,但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\sin n=0$ 存在.

(3)若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ 都存在,且满足 $u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n<\lim\limits_{n\to\infty}v_n$. (错)

例如:$u_n=\dfrac{1}{n^2+1}$,$v_n=\dfrac{1}{n}$,$u_n<v_n(n=1,2,\cdots)$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

2. 下列运算错在何处?

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}x^2}{\lim\limits_{x\to2}(2-x)}=\infty$.

答:(1) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$($\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在).

(2) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2}{2-x}\neq\frac{\lim\limits_{x\to2}x^2}{\lim\limits_{x\to2}(2-x)}$ ($\lim\limits_{x\to2}(2-x)=0$).

3. 设有两个数列 u_n 与 v_n，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a\neq0$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=a\neq0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{u_n}{v_n}}=\frac{1}{a}$，即 $\left\{\frac{v_n}{u_n}\right\}$ 有界，而 $v_n=\frac{v_n}{u_n}\cdot u_n$，由数列极限的定义及性质可知 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

4. 证明数列 $x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}$ 有极限.

证明　$\{x_n\}$ 单调增加，且

$$x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}<1,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加有上界，故有极限.

5. 设 $0<x_1<2$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 x_n 有极限，并求出该极限.

证明　显然 x_n 单调递增 $0<x_1<2$，设 $x_n<2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$，即数列 x_n 有界，那么 $\{x_n\}$ 有极限，设极限为 a，则 $a=\sqrt{2+a}$，解得 $a_1=2$，$a_2=-1$（舍去），所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=2$.

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & x<0.\end{cases}$$

7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, x<1,\\ 0, \quad x\geqslant1,\end{cases}$ 问 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 是否存在?

答：$\lim\limits_{x\to1^-}(2x-1)=1$，而 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}0=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

9. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，证明在 x_0 的某一个去心邻域内 $f(x)>0$.

证明 因为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$,由极限定义,取$\varepsilon=\frac{A}{2}$,存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有,$|f(x)-A|<\frac{A}{2}$,即$0<\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<f(x)<A+\frac{A}{2}$,所以$f(x)>0(0<|x-x_0|<\delta)$.

10. 设$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<0,\\ x, \quad x>0,\end{cases}$画出$f(x)$的图像,求$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$及$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$,并问$\lim\limits_{x\to0}f(x)$是否存在.

分析:这是一个判断分段函数在分段点处极限是否存在的问题,在这类问题中,分段函数的分段方式有两种,一种是用"大于(或等于)"和"小于(或等于)"来分段,另一种是用"等于"和"不等于"来分段,例如函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<0,\\ x, \quad x>0\end{cases}$就是用"大于(或等于)"和"小于(或等于)"来分段.

解 $f(x)$的图像如右图2-1.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x^2+1)=1,$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0,$$

因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

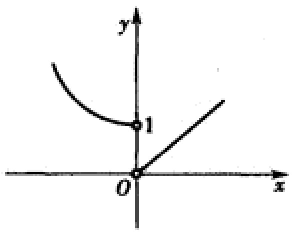


图 2-1

11. 讨论$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的存在性,其中$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & -\infty<x<0,\\ x^2+2x-1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ \frac{x^2-1}{x-1}, & 1<x<+\infty;\end{cases}$ 且$x_0=0,1$.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+2x-1)=-1$,所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+2x-1)=2$,$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$,所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

12. 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to2}\frac{|x-2|}{x^2-4}$;

(2)$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}+a, x<0,\\ 1+x^2, \quad x>0,\end{cases}$当$a$为何值时,$f(x)$在$x=0$的极限存在.

解 (1) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}=-\frac{1}{4}$,

$$\lim_{x\to2^+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to2^+}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4},$$

因为左极限不等于右极限,所以极限不存在.

(2)由于函数在分段点 $x=0$ 处,两边的表达式不同,因此一般要考虑在分段点 $x=0$ 处的左极限与右极限.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}+a\right)=\lim_{x\to0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to0^-}a=a,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1+x^2)=1,$$

为使 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在,必须有 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,因此,当 $a=1$ 时,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

对于求含有绝对值的函数及分段函数分界点处的极限,要用左右极限来求,只有左右极限存在且相等时极限才存在,否则,极限不存在.

13. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}$.

解　(1)因为 $\frac{n}{n+\sqrt{n}}<\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}<\frac{n}{n+\sqrt{1}}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{1}}=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$.

(2)因为 $\frac{n^2}{n^2+n\pi}<n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)<\frac{n^2}{n^2+\pi}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1$;$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1$,所以原式 $=1$.

(3)因为 $\frac{1}{2}=\frac{\sqrt[n]{1}}{2}\leqslant\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}\leqslant\frac{\sqrt[n]{3}}{2}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}}{2}=\frac{1}{2}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}.$$

三、函数极限的求法

求函数极限的基本方法有以下几种:(1)利用函数的连续性求极限;(2)利用四则运算法则求极限;(3)利用两个重要极限求极限;(4)利用无穷小替换定理求极限;(5)利用分子、分母消去共同的非零公因子求 $\frac{0}{0}$ 形式的极限;(6)利用分子,分母同除以自变量的最高次幂求 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式的极限;(7)利用连续函数的函数符号与极限符号可

交换次序的特性求极限；(8)利用“无穷小与有界函数之积仍为无穷小量”求极限.

(一)基本初等函数的极限

基本初等函数在定义域内任何一点处的极限都等于函数在这一点的函数值，因此，求基本初等函数在定义域内任何一点处的极限，只需要计算在这点的函数值即可.

(二)初等函数的极限

所谓初等函数指的是六类基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除、乘方、开方和复合后形成的新的函数. 初等函数在其定义域内任何一点处的极限也都等于该函数在这一点的函数值.

(三)多项式函数的极限

可采用直接代入法求函数值即可.

(四)分式函数的极限

求分式函数的极限时需区别对待，分子、分母取不同的值时，分式函数的极限对应不同的求法. 所以我们在求解分式函数的极限时，要根据分子、分母不同的取值把分式函数进行分类，每类分式函数对应不同的求法. 一般的分类方式是按照分子、分母分别取非零常数、0、∞ 等三个不同值时组合进行. 下面我们给出几类常见分式函数的求极限方法. 这样，我们在求分式函数极限时，就可以先观察分式函数的类型，再决定采用何种方法，然后求极限即可.

1)“$\dfrac{\text{非零常数}}{\text{非零常数}}$”型

这类分式函数模型指的是分式函数的分子和分母在所求极限点处的的值分别为不等于 0 的常数. 这类分式函数的极限只需直接计算函数在极限点处的函数值.

例：求$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4}{x^3+9}$.

解 当 $x=3$ 时，$x^2-4=5$，$x^3+9=36$，分子、分母在极限点处的函数值都是不等于 0 的常数，因此所求函数的极限就等于函数在 $x=3$ 时的函数值，即$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4}{x^3+9}=\dfrac{5}{36}$.

2)“$\dfrac{0}{\text{非零常数}}$”型

例：$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-2\sqrt{3}x+3}{x^2-4}$.

解 当 $x=\sqrt{3}$，$x^2-2\sqrt{3}x+3=0$，$x^2-4=-1$，即分子在极限点处的函数值等于 0，分母在极限点处的函数值为不等于 0 的常数，这类模型的极限等于 0. 即

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-2\sqrt{3}x+3}{x^2-4}=0.$$

3)“$\frac{非零常数}{0}$”型

例:求$\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$.

解　$x=-2$时,$\sqrt{x+3}=1$,$x^2-4=0$,分子在极限点处的函数值是不等于0的常数,分母在极限点处的函数值为0,这类模型的极限为∞,即$\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}=\infty$.

4)“$\frac{\infty}{非零常数}$”型

例:求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{4}$.

解　当$x\to\infty$分子的函数值趋于∞,分母的函数值恒等于4,这类模型的极限为∞.即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{4}=\infty$.

5)“$\frac{非零常数}{\infty}$”型

例:求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$.

解　$x\to\infty$,分子的函数值等于1,分母的函数值趋于∞.这类模型的极限为0.即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=0$.

6)“$\frac{0}{0}$”型

这类极限属于我们平常所说的未定式,也就是说这类模型的极限是不确定的,可能会是0,可能会是不等于0的常数,也可能是∞.这里我们介绍分子分母都是一般的多项式和分子、分母含有根式两类极限的求法.

分子分母为一般多项式.

这类极限求解时,我们只需利用以前学过的因式分解的方法,把分子、分母分解因式,约去分子、分母中使分子、分母为0的因式,就会使此类极限变为我们前面列举的分式极限中的某种模型,按照我们给出的方法求解即可,需要注意的是,在这类极限问题求解中,我们有时只需要对分子分解因式,有时只需对分母分解因式,有时要对分子分母同时分解因式,至于什么时候分子分解、什么时候分母分解、什么时候分子分母要同时分解,我们掌握的原则就是要使得分子分母中的只要能分解因式就必须全部分解完毕.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$.

2. 设$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$有极限值 m,试求 a 及 m 的值.

解 当 $x=-1$ 时,分母函数值为0,要使分式的极限存在,分子的函数值也应为零,由此得 $a=4$. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x^2-5x+4)}{x+1}=10, m=10$.

分子分母中含有根式.

这类极限有三种表现形式,一种是分子含有根式.一种是分母含有根式,一种是分子分母同时含有根式,不管是哪里含有根式,我们所做的就是根式有理化,分子含有根式,就分子有理化(也就是分子分母同时乘以分子的有理化因式);分母含有根式,就分母有理化(也就是分子分母同时乘以分母的有理化因式);分子分母同时含有根式,就分子分母都有理化,可以先分子有理化,再分母有理化,也可以先分母有理化,再分子有理化.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\dfrac{2}{3}$.

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{2-x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(2-\sqrt{x+2})(2+\sqrt{x+2})}{(2-x)(2+\sqrt{x+2})}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{2+\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{4}$.

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x^2-x+1}-1}$.

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to1}\frac{(x^2+x-2)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{(x^2-x+1)-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{x(x-1)}=6.\end{aligned}$$

7) “$\dfrac{\infty}{\infty}$”型

这类极限属于我们平常所说的未定式,也就是说这类模型的极限是不确定的,可能会是0,可能会是不等于0的常数,也可能是∞.这里我们给出分子分母都是多项式的此类极限的求法,其他类型我们会在后面的内容中给出.

对于分子分母都是多项式此类极限,我们记住并会应用下面的公式即可:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\infty, n>m,\\ \dfrac{a_n}{b_m}, n=m,\\ 0,\ n<m.\end{cases}$$

也即当 $x\to\infty$ 时，只需要比较分子、分母中自变量的最高次数，当分子最高次数较高（如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-9}{6x^2+9}$），极限等于∞；当分母最高次数较高（如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9}{x^3+9}$），极限等于0；当分子、分母最高次数相等，极限等于最高次数的系数之比（如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+9}{5x^3+3x+7}=\dfrac{3}{5}$）.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^3+1}{2x^4+5x^2-6}$.

解一　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{6}{x^4}}=2.$

解二　分子最高次为4，分母最高次也为4，则极限应该等于最高次项系数之比. 即原式 $=2$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^9(1-2x)^5}{8(x-3)^{14}}$.

解　分子中 $(x+5)^9$ 最高次项为 x^9，$(1-2x)^5$ 最高次项为 $(-2x)^5$，两项相乘得最高次项 $x^9(-2x)^5=(-2)^5x^{14}$；分母最高次项为 $8x^{14}$，均为14，故可用上述方法，求出极限为 -4.

8）"$\dfrac{0}{\infty}$"型

此类极限可以转化为"$0\cdot\dfrac{1}{\infty}\Leftrightarrow 0\cdot 0$"，可以按照两个无穷小量的乘积求极限.

9）"$\dfrac{\infty}{0}$"型

此类极限可以转化为"$\infty\cdot\dfrac{1}{0}\Leftrightarrow\infty\cdot\infty$"，可以按照两个无穷大量的乘积求极限.

10）其他未定型极限

①"$\infty-\infty$"型

方法：通分将'$\infty-\infty$'型转为"$\dfrac{0}{0}$"型或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型，再利用因式分解或洛必达法则（后面介绍）求极限.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-2x-3}\right)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-2x-3}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{4}{(x-3)(x+1)}\right)$

$$=\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-3x-4}{(x-3)(x+1)}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-4)}{(x-3)(x+1)}=\frac{5}{4}.$$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)}\right)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}$，当 $x\to0$ 时，$\ln(x+1)\sim x$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(\ln(x+1)-x)'}{(x^2)'}\text{（洛必达法则）}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

注意：在等价无穷小量代换过程中，分子中 $\ln(x+1)$ 不是分子 $\ln(x+1)-x$ 的因子，因此，不能用等价无穷小 x 直接代换. 当然，此题可以在通分后不经过等价无穷小量代换而直接使用洛必达法则，不过过程稍繁.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

分析：极限模型属于"$\infty-\infty$"型；但没有分式，不能直接通分，应先稍做变换.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$（洛必达法则）$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{0-\cos x}{-\sin x}=0.$

②"$0\cdot\infty$"型

方法：设法将"$0\cdot\infty$"型转化为"$\dfrac{0}{0}$"型或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型，再求解.

4. $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}}=0.$

③"1^∞"型（即指数带有变量的形式）

方法：利用重要极限公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

解　令 $1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2x-1}{2x+1}$，解得 $x=-y-\dfrac{1}{2}$，当 $x\to\infty$ 时，$y\to\infty$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2(-y-\frac{1}{2})}=e^{-2}.$$

（五）分式函数极限计算综合练习

1. 求下列各式的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^{70}(8x-1)^{30}}{(5x+2)^{100}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;　　(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$;

(7) $\lim\limits_{t\to1}(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{2}{1-t^2})$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+1)^{70}(8x-1)^{30}}{(5x+2)^{100}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3+\dfrac{1}{x}\right)^{70}\left(8-\dfrac{1}{x}\right)^{30}}{\left(5+\dfrac{2}{x}\right)^{100}}=\dfrac{3^{70}8^{30}}{5^{100}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x+1)}{(2x^2-1)(2x+1)}=\dfrac{1}{4}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}\sin x}{1-\dfrac{1}{x}\cos x}=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}$.

(6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=3$.

(7) $\lim\limits_{t\to1}(\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{2}{1-t^2})=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t-1}{1-t^2}=-\dfrac{1}{2}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n+1}{2n^3+3n^2-1}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$;　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$;　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n+1}{2n^3+3n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}}=2.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right]}{3^{n+1}\left[\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right]}=\dfrac{1}{3}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)}=1.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{1+2+\cdots+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1+(2n-1)}{2}\cdot n}{\dfrac{1+n}{2}\cdot n}=2.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e^2.$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1}=e.$

(8) 记 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$,则 $2S_n=1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}.$

$S_n=2S_n-S_n=1+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{5}{2^2}-\dfrac{3}{2^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}-\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}\right)-\dfrac{2n-1}{2^n}$

$=1+1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{2n-1}{2^n}.$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=3.$

四、利用两个重要极限求函数的极限

利用 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 求极限时,函数的特点是 $\dfrac{0}{0}$ 型,满足 $\lim\limits_{u(x)\to0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}$ 的形式;

用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$求极限时，函数的特点是$1^\infty$型幂指函数，其形式为$[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}$型，$\alpha(x)$为无穷小量，而指数为无穷大，两者恰好互为倒数.

用两个重要极限求极限时，往往用三角公式或代数公式进行恒等变形或作变量代换，使之成为重要极限的标准形式.

（一）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

这个重要极限公式有两个特征：在给定的极限过程中，分子、分母均为无穷小量.简记为"$\frac{0}{0}$"型，正弦符号下的变量与分母中的变量完全相同，即$\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$ 形式.

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$

3. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

解　令$t=\arcsin x$，则$x=\sin t$. $x\to 0$时，$t\to 0$，所以

原式$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$

4. 求解下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sec\frac{\pi x}{2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$

(2) 令$1-x=t$，则$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sec\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}.$

（二）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

这个重要极限公式也有两个特征：对于给定的极限过程，底数为"1＋无穷小"的

形式，指数在给定的极限过程中为无穷大并且是底数中无穷小的倒数. 满足这两个条件的极限必等于 e. 即 $\lim\limits_{\square\to\infty}(1+\frac{1}{\square})^{\square}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$ 形式.

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x\cdot(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

解一　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{x-a}{2a}\cdot 2a+a}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{2a}\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{x-a}{2a}}\right]^a=\mathrm{e}^{2a}.$$

解二　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}}\right]^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=\mathrm{e}^{2a}$.

4. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解　(1) 分子先用和差化积公式变形，然后再用重要极限公式求极限.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(4\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=1\times 4=4$.

(2) **解一**　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}$

$=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1$.

解二　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{(-x^2)}\right]^{(-\frac{1}{x})}=\mathrm{e}^0=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan^2x)^{\cot^2x}=\lim\limits_{x\to0}[(1+3\tan^2x)^{\frac{1}{3\tan^2x}}]^3=e^3$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{-4}\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{-1}=e^{-4}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right]^x\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]^x=1$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{4}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]}{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}\cdot x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot3}=3.$$

同理 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=1$，所以原极限 $=3-1=2$.

五、利用无穷小的比较计算极限

利用无穷小与无穷大的关系，可求一类函数的极限（分母极限为零，而分子极限存在的函数极限）；利用有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小定理可得一类函数的极限（有界量与无穷小之积的函数极限），利用等价无穷小也可求一些函数的极限.

常用的等价无穷小如下：

当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$，

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$2x\sim\sin 2x\sim\tan 2x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

利用等价无穷小可代换整个分子或分母，也可代换分子或分母中的因式，但当分子或分母为多项式时，一般不能代换其中一项. 否则会出错.

如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$，即得的是错误结果.

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+1}{x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$ 而 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)\neq0$，求该式的极限需用无穷小与无穷大关系定理解决. 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+1}=0$，所以当 $x\to1$ 时，$\frac{x-1}{x^2+1}$ 是无穷小量，因而它的倒

数是无穷大量，即$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty$.

(2)不能直接运用极限运算法则，因为当$x\to+\infty$时分子中$\sin x$的极限不存在，但$\sin x$是有界函数，即$|\sin x|\leqslant1$而$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}}=0$，因此当$x\to+\infty$时，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$为无穷小量. 根据有界函数与无穷小乘积仍为无穷小定理，即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^3}}=0.$$

2. 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}\left(x\to0,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\right)$.

(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{(1-\cos x)}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\quad\left(\text{因为 }x\to0,\sin^2\frac{x}{2}\sim\left(\frac{x}{2}\right)^2\right).$$

3. 两个无穷大的和仍为无穷大吗？试举例说明.

答:不一定.

如$\dfrac{1}{x}$是$x\to0^+$时的无穷大量，$1-\dfrac{1}{x}$也是$x\to0^+$时的无穷大量，但其和为1，不是$x\to0^+$时的无穷大量.

4. 函数$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$在什么条件下是无穷大量，什么条件下是无穷小量？为什么？

答:$f(x)$当$x\to1$时是无穷大量，当$x\to-1$时是无穷小量. 因为

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x-1}=0,\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-1}=\infty.$$

5. 利用等价无穷小代换，求下列各极限.

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$;

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{x\sin 2x}$;　　(4)$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{a}-1)$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{2x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{2x^2}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{2x^2}=\dfrac{3}{4}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{x}=0.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2.$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{3}}{x^2}=\dfrac{1}{3}.$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{a}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(e^{\frac{1}{n}\ln a}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\ln a}{n}=0.$

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{a^2}}{x^2}=-\dfrac{1}{a^2}.$

6. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$. 所以 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x-1}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

7. 比较下列各组无穷小.

(1) 当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}$ 与 $1-\sqrt{x}$；　　(2) 当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$；

(3) 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 是 $1-\sqrt[3]{x}$ 的几阶无穷小.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+x)(1-\sqrt{x})}=1$，所以 $x\to 1$ 时 $\dfrac{1-x}{1+x}\sim 1-\sqrt{x}$.

(2)因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=0$.

所以$(1-\cos x)^2$为比$\sin^2 x$高阶的无穷小.

(3)因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim\limits_{x\to 1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3$,

所以无穷小$1-x$是$1-\sqrt[3]{x}$的同阶无穷小.

8. 试证$x\to 0$时,$\sin x^2$是比$\tan x$高阶的无穷小.

证明 因为当$x\to 0$时,$\sin x^2\sim x^2$,$\tan x\sim x$,又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$,所以$x\to 0$时,$\sin x^2$是比$\tan x$高阶的无穷小.

9. 试证$x\to 0$时,e^x-1与x是等价无穷小.

证明 令$e^x-1=u$,则$x=\ln(u+1)$,于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln e}=1,$$

故$x\to 0$时,e^x-1与x是等价无穷小.

六、利用函数的连续性求极限

利用"函数连续的极限值即为函数值"可求连续函数的极限.在一定条件下复合函数的极限,极限符号与函数符号可交换次序.

1. 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$;　　(2)$\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 (1)因为$\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$是初等函数,在$x=2$处有定义,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{4+\sin 2}{e^2\sqrt{5}}.$$

(2)函数$\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$看成由$y=\arcsin u$,$u=\sqrt{x^2+x}-x$复合而成,利用分子有理化$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\dfrac{1}{2}$,然后利用复合函数求极限法则运算有

$$\lim_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to +\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$=\arcsin\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 3\pi}\sin 3x$;

(2) $\lim\limits_{x\to 3\pi}\cos 3x$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3-2x^2+x-1)$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+2^x+1)$;

(5) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x}{x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\arctan x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 3\pi}\sin 3x=\sin 3(3\pi)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 3\pi}\cos 3x=\cos 3(3\pi)=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3-2x^2+x-1)=3\times 2^3-2\times 2^2+2-1=17$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+2^x+1)=e^0+2^0+1=3$.

(5) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\arctan x=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\tan\left(\ln\dfrac{4x^2+1}{x^2+4x}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to +\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$;

又因为$\lim\limits_{x\to +\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\sin\left(\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)=\sin\left(\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right)=0$, 而 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$, 故$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\tan\left(\ln\dfrac{4x^2+1}{x^2+4x}\right)=\tan\left[\ln\left(\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2+1}{x^2+4x}\right)\right]=\tan(2\ln 2)$.

第三章　函数连续性的判断与应用

一、连续性的判断

若$f(x)$在x_0不满足连续的条件，则称$f(x)$在x_0是不连续的或称是间断的，x_0称为$f(x)$的间断点.

不连续点（间断点）的情形：在$x=x_0$没有定义；虽在$x=x_0$有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；虽在$x=x_0$有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

间断点类型：

$$\begin{cases}\text{第一类间断点}\begin{cases}\text{左右极限相等（可去间断点）}\\ \text{（左右极限都存在）左右极限不相等（跳跃间断点）}\end{cases}\\ \text{第二类间断点（左右极限至少有一个不存在）.}\end{cases}$$

1. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x\neq 0,\\ k, & x=0,\end{cases}$求$k$值使得$f(x)$在点$x=0$处连续.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2.$

所以当$k=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$时，$f(x)$在点$x=0$处连续.

2. 试用"$\varepsilon-\delta$"语言证明函数$f(x)=\sin\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$上连续.

证明　任取$x_0>0$给定，对于任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\sqrt{x_0}\,\varepsilon$，则当$|x-x_0|<\delta$，且$x>0$时，

$$|\sin\sqrt{x}-\sin\sqrt{x_0}|=\left|2\cos\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{2}\sin\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon,$$

即$\sin\sqrt{x}$在x_0点连续，由x_0的任意性知$f(x)$在$(0,+\infty)$连续.

3. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$为连续函数，试确定$a$与$b$的值.

证明　当$|x|<1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$，当$x=1$时$f(x)=\dfrac{1+a+b}{2}$，当$x=-1$时$f(x)=\dfrac{-1+a-b}{2}$，当$|x|>1$时$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=$

$\frac{1}{x}$. 故 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1 \\ \frac{1+a+b}{2}, & x=1, \\ \frac{-1+a-b}{2}, & x=-1, \\ \frac{1}{x}, & |x|>1. \end{cases}$

因此 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x}=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(ax^2+bx)=a-b$，由分段函数在分段点处连续性可得 $a=0,b=1$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解　$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，函数在点 $x=0$ 处是连续的.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 1+\cos x, x<\frac{\pi}{2}, \\ \sin x, \quad x\geqslant\frac{\pi}{2} \end{cases}$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的连续性.

解　$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$；$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\sin x=1$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1+\cos x)=1$，即 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，函数在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 处是连续的.

6. 设 $y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x=1. \end{cases}$ 考察 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1\neq f(1)$，所以 $x=1$ 为间断点，此时，可改变函数在 $x=1$ 处的定义使其在 $x=1$ 连续，$x=1$ 为可去间断点.

如 $y=f(x)=\begin{cases} x, x\neq 1, \\ 1, x=1. \end{cases}$ 在 $x=1$ 连续.

7. 设 $y=f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，所以 $x=0$ 为间断点（跳跃间断点，不可去）.

8. 函数 $y=f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ 2k+1, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 k 值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=e^2$，又 $f(0)=2k+1$，根据 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续的定义可知 $2k+1=e^2$，即 $k=\frac{1}{2}(e^2-1)$.

二、间断点的判断

1. 求函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)x}$ 的间断点，并判断其类型.

解　由初等函数在其定义区间上连续知 $f(x)$ 的间断点为 $x=0,x=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x}=2$，而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，故 $x=1$ 为其可去间断点.

又因为 $f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

综上得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，$x=0$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

2. 指出下列函数的间断点及其所属类型，若是可去间断点，试补充或修改定义，使函数在该点连续.

(1) $y=\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$；　　(2) $y=\arctan\frac{1}{x-1}$；

(3) $y=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数；

(4) $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$.

解　(1) 函数无定义的点为 $x=0,x=\pm 1$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=-1$，所以 $x=0$ 为第一类间断点.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\frac{1}{2}$，所以 $x=1$ 为可去间断点，补充定义 $y(1)=\frac{1}{2}$，则函数在 $x=1$ 处连续. 而 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\infty$，故 $x=-1$ 为第二类间断点.

(2) 函数无定义的点 $x=1$，因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\arctan\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\frac{1}{x-1}=-\frac{\pi}{2}$，所以 $x=1$ 为第一类间断点

(3) 设 $x_0=k_0+t_0$，其中 $0\leqslant t_0<1$，k_0 为整数，则 $[x_0]=k_0$.

a) 若 x_0 非整数，即 $0<t_0<1$，则任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{t_0,1-t_0,\varepsilon\}$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$[x]=k_0$，$|y(x)-y(x_0)|=|x-k_0-x_0+k_0|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon$，即函数在 x_0 连续.

b) 若 $x_0=k_0$，记 $x=k_0+t$，$-1<t<1$，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}(x-[x])=\lim\limits_{t\to 0^+}(k_0+t-k_0)=0$，

$\lim\limits_{t\to x_0^-}(x-[x])=\lim\limits_{t\to 0^-}[k_0+t-(k_0-1)]=1$，故 $x_0=k_0$ 为间断点且为第一类间断点，即 x 为整数点时函数间断.

(4) 函数在 $x=0$ 与 $x=1$ 无定义，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 为第二类间断点，又因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$，则 $x=1$ 为第一类间断点.

3. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，问 $f(x)+g(x)$ 及 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 是否连续？若肯定或否定，请给出证明；若不确定试给出例子（连续的例子与不连续的例子）.

解　a) $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 肯定不连续，证明如下：若 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 连续，又因 $f(x)$ 在点 x_0 连续，故 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 在点 x_0 也连续，此与题设矛盾.

b) $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 的连续性不能确定. 例：若 $f(x)\equiv 1$，$g(x)$ 为任一在 x_0 不连续的函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 不连续. 又例：若 $f(x)=x$，$g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$，则 $f(x)$，$g(x)$ 满足题目要求，但 $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处连续.

4. 指出函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的间断点及其类型.

解　因 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -x, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $x=\pm 1$ 是其跳跃间断点.

5. 若 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\sin x$，求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域，并讨论 $f[g(x)]$ 的连续性.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & \sin x\geqslant 0,\\ -1, & \sin x<0,\end{cases}$ 即 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\\ -1, & (2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi,\end{cases}$ 其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$；所以 $f[g(x)]$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$x=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots;)$ 均为其跳跃间断点.

三、闭区间上连续函数的性质的应用

1. 证明方程 $xe^{x^2}=1$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一实根.

证明　设 $f(x)=xe^{x^2}-1$，则 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}-1<\dfrac{1}{2}\sqrt{2}-1<0$，$f(1)=e-1>1>0$，由介值定理，存在 $\zeta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f(\zeta)=0$，即 $\zeta e^{\zeta^2}=1$，也即 ζ 为方程的根. 下证唯一性.

显然，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调增加(严格)，故若$x<\zeta$时，$f(x)=f(x)-f(\zeta)<0$，$x>\zeta$时，$f(x)=f(x)-f(\zeta)>0$，即当$x\neq\zeta$时，$f(x)\neq 0$，即方程在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内无异于$\zeta$的根.

2. 区间$(a,b]$上的连续函数一定存在最大值与最小值吗？举例说明？

答：区间$(a,b]$上的连续函数不一定存在最大值与最小值.

如：$y=\ln x$在$(0,1]$上连续，但不存在最小值；$y=\frac{1}{x}$在$(0,1]$上连续，但不存在最大值.

3. 设$f(x)$在点x_0连续，且$f(x_0)\neq 0$，试证存在$\delta>0$，使得当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

证明　取$\varepsilon=\frac{|f(x_0)|}{2}>0$，因$f(x)$在点$x_0$连续，故存在$\delta>0$，使$|x-x_0|<\delta$，即$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\frac{|f(x_0)|}{2}$，即

$$f(x_0)-\frac{|f(x_0)|}{2}<f(x)<f(x_0)+\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

于是

a)若$f(x_0)>0$，则$f(x)>f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}$.

b)若$f(x_0)<0$，是$f(x)<-|f(x_0)|+\frac{|f(x_0)|}{2}=-\frac{|f(x_0)|}{2}$，即$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}$.

4. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续且无零点，证明存在$m>0$，使得或者在$[a,b]$上恒有$f(x)\geqslant m$，或者在$[a,b]$上恒有$f(x)\leqslant -m$.

证明　若有$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)>0$，由闭区间上连续函数的最值定理，设$f(x)$在$x_1\in[a,b]$取最小值m，则可断定$m>0$，从而$f(x)\geqslant m$，$x\in[a,b]$. 若不然$m<0$，由连续函数介值定理，在x_0与x_1之间必有一点ζ，使$f(\zeta)=0$，此与$f(x)$无零点矛盾.

同法可证，若有$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)<0$，则存在$m>0$，使$f(x)<-m$，$x\in[a,b]$ ($-m$为$f(x)$在$[a,b]$上最大值，则$-m<0$，从而$m>0$).

5. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，证明在$[0,1]$上至少存在一点$\zeta$，使得$f(\zeta)=\zeta$.

证明　设$F(x)=x-f(x)$则由题设$F(x)$在$[0,1]$上连续，$F(0)=-f(0)\leqslant 0$，$F(1)=1-f(1)\geqslant 0$. 若$F(0)=0$或$F(1)=0$，则可取$\zeta=0$或$\zeta=1$. 结论成立；否则$F(0)<0$，$F(1)>0$，由连续函数介值定理，存在$\zeta\in(0,1)$使得$F(\zeta)=0$，即$f(\zeta)=\zeta$.

6. 若$f(x)$在$[a,b)$上连续，且$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在，证明$f(x)$在$[a,b)$上有界.

证明　设$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，取$\varepsilon=1$，由极限定义，存在$0<\delta<b-a$，使当$0<b-x<\delta$，

即 $x\in(b-\delta,b)$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon=1$，从而 $|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$，又因 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b-\delta]$ 上连续，从而有界，设在 $[a,b-\delta]$ 上，$|f(x)|\leqslant M$，记 $N=\max\{M,|A|+1\}$，则当 $x\in[a,b)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant N$，即 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上有界.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明在 $[0,a]$ 上至少存在一点 ζ，使得 $f(\zeta)=f(\zeta+a)$.

证明　设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且 $F(0)=f(0)-f(a)=f(2a)-f(a)$，$F(a)=f(a)-f(2a)=-F(0)$. 若 $F(0)=0$，$\zeta=0$ 即为所求，若 $F(0)\neq0$，则 $F(0)F(a)=-F^2(0)<0$，故由介值定理，存在 $\zeta\in(0,a)$ 使 $F(\zeta)=0$，即 $f(\zeta)=f(\zeta+a)$.

8. 设 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实数，且 $f(x)=a_1\ln(1+x)+a_2\ln(1+2x)+\ldots+a_n\ln(1+nx)$，如果当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant\ln(1+x)$，证明 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$.

证明　当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant\ln(1+x)$，从而，当 $x\in(0,1)$ 时，

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\frac{\ln(1+x)}{x},\ \lim_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

又因为
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to0^+}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=k,$$

而
$$\lim_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to0^+}\left|\frac{a_1\ln(1+x)}{x}+\frac{a_2\ln(1+2x)}{x}+\cdots+\frac{a_n\ln(1+nx)}{x}\right|$$
$$=|a_1+2a_2+\cdots+na_n|.$$

所以 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$.

第四章　导数的计算

一、导数概念的应用

1. 思考下列命题是否正确？如不正确举出反例.

(1)若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定不连续.

(2)若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则 $y=f(x)$ 必处处可导.

答：(1)命题错误. 如：$y=|x|$ 在 $x_0=0$ 处不可导，但在此点连续.

(2)命题错误. 如：$y^2=2x$ 处处有切线，但在 $x=0$ 处不可导.

2. 若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=A$（$A$ 为常数），试判断下列命题是否正确.

(1) $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导；

(2) $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续；

(3) $f(x)-f(a)=A(x-a)+o(x-a)$.

答：命题(1)，(2)，(3)全正确.

3. 试举出至少 5 个能用导数描述变化率的有实际意义的变量（写成小短文）.

答：导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的因变量 y 在 x_0 处相对于自变量 x 的变化率. 在实际生活中，如：

(1)物体的密度是物体的质量对体积的变化率；

(2)电流强度是单位时间内流过电路某一截面的电量，即电量对时间的变化率；

(3)边际成本是产品的总成本对产量的变化率；

(4)在化学反应中某物质的反应速度是其浓度对时间的变化率；

(5)加速度是速度对时间的变化率.

4. 已知 $(\sin x)'=\cos x$，利用导数定义求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-1}{x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{x}=(\sin x)'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

5. 用导数定义求下列函数在指定点 x_0 处的导数.

(1) $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=1$；

(2) $f(x)=\tan x$，$x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

解　(1) $$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}.$$

$$(2)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1+\tan\Delta x}{1-\tan\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\tan\Delta x}{\Delta x(1-\tan\Delta x)}=2.$$

6. 若曲线 $y=x^3$ 在其上一点 (x_0,y_0) 处切线斜率等于 3，求点 (x_0,y_0) 的坐标.

解　由题意得：$(x^3)'|_{x=x_0}=3$，即　$3x_0{}^2=3$，解之得 $x_0=\pm 1$.

把 $x_0=1$ 代入 $y=x^3$，得 $y_0=1$. 把 $x_0=-1$ 代入 $y=x^3$，得 $y_0=-1$. 综上得点 (x_0,y_0) 的坐标为 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$.

7. 抛物线 $y=x^2$ 在何处切线与 Ox 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{4}$，并且求该处切线的方程.

解　由题意得 $(x^2)'|_{x=x_0}=\tan\frac{\pi}{4}$，即 $2x_0=1$，解之得 $x_0=\frac{1}{2}$.

把 $x_0=\frac{1}{2}$ 代入 $y=x^2$，得 $y=\frac{1}{4}$，$y=x^2$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ 点处切线与 Ox 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{4}$，此处切线为 $y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$，即 $y=x-\frac{1}{4}$.

8. 一个物体垂直上抛，设经过时间 t s 后，物体上升的高度为 $S(t)=10t-\frac{1}{2}gt^2$，求下列各值：(1) 物体在 1 s 到 $1+\Delta t$ s 这段时间内的平均速度；(2) 物体在 1 s 时的瞬时速度.

解　(1) $S(1)=10-\frac{1}{2}g$，$S(1+\Delta t)=10+10\Delta t-\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2$，

$\Delta S=S(1+\Delta t)-S(1)=10\Delta t-g\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$.

平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=10-g-\frac{1}{2}g\Delta t$.

(2) 瞬时速度 $v(1)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=10-g$.

二、可导的判断及可导与连续的关系

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^a}\cdot\cos\frac{1}{x-1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则当 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导时实常数 a 必满足什么条件.

解　$f(x)$ 在 $x=1$ 可导，则 $f'(1)$ 存在，亦即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^a\cos\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{-(1+a)}\cos\frac{1}{\Delta x}$$

存在，所以 $a+1<0$，即 $a<-1$.

2. 设曲线$f(x)=x^n$在点$(1,1)$处的切线与x轴的交点为$(\xi_n,0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)$.

解 设$f(x)$在点$(1,1)$处的切线为$y=ax+b$，则$1=a+b$，$a=f'(1)=n$，当$y=0$时，$\xi_n=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1-n}{n}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

3. 设$f(x)=(x^{2003}-1)g(x)$，其中$g(x)$在$x=1$处连续，且$g(1)=1$，求$f'(1)$.

解
$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^{2003}-1)g(x)-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^{2002}+x^{2001}+\cdots+x+1)g(x)=2003.$$

4. 讨论下列函数在$x=0$处的可导性与连续性：

(1)$y=|\sin x|$；

(2)$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1)$y'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

$$y'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{|\sin x|-|\sin 0|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1.$$

所以$y=|\sin x|$在$x=0$处不可导. 但$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}|\sin x|=\sin 0=0$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}|\sin x|=\sin 0=0$，所以$y=|\sin x|$在$x=0$处连续.

(2)$y'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以函数在$x=0$处可导，从而必定连续.

5. 证明 若两个可导函数$f(x)$与$\varphi(x)$满足$f(0)=0$，$\varphi(0)=0$，$f'(0)$与$\varphi'(0)$均存在且$\varphi'(0)\neq0$，则有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

证明
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{\varphi(0)-\varphi(0)}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x)}{x}}=\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

6. 求函数$f(x)=\begin{cases}x^3, & x>1,\\ 2-x^2, & x\leqslant1,\end{cases}$在点$x_0=1$处的左右导数.

解
$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x^2+x+1)=3,$$
$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{2-x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}(-1-x)=-2.$$

7. 确定a值，使$y=ax$为曲线$y=\ln x$的切线.

解　设切点横坐标为 x_0，则在切点处函数值相等，导数值（斜率）相等，即有 $ax_0=\ln x_0$，$a=\dfrac{1}{x_0}$，所以 $ax_0=1$，即 $\ln x_0=1$，故 $x_0=\mathrm{e}$，$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

8. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+nh)-f(a-mh)}{h}$（$m,n$ 为常数）.

解
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a-mh)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-mh)-f(a)}{h}$$
$$=n\lim_{h\to 0}\frac{f(a+nh)-f(a)}{nh}+m\lim_{h\to 0}\frac{f(a-mh)-f(a)}{-mh}=(n+m)f'(a).$$

9. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant c,\\ ax+b, & x>c\end{cases}$ 其中 c 为常数，试确定 a 和 b，使得 $f'(c)$ 存在.

解　要 $f'(c)$ 存在，必须 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=f(c)$，

$\lim\limits_{x\to c^+}(ax+b)=\lim\limits_{x\to c^-}x^2=c^2$，即 $ac+b=c^2$.

又
$$f'_+(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^+}\frac{ax+b-c^2}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c^+}\frac{ax+b-(ac+b)}{x-c}=\lim_{x\to c^+}\frac{a(x-c)}{x-c}=a.$$
$$f'_-(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^-}\frac{x^2-c^2}{x-c}=2c,$$

由 $f'_+(c)=f'_-(c)$ 得 $a=2c$，从而 $b=-c^2$. 即当 $a=2c$，$b=-c^2$ 时 $f'(c)$ 存在.

三、导数运算法则的应用

1. 思考下列命题是否成立？

（1）若 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处都不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处也一定不可导.

（2）若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，$g(x)$ 在点 x_0 处不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处一定不可导.

答：（1）命题不成立.

如：$f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0,\\ x, x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, x\leqslant 0,\\ 0, x>0,\end{cases}$ $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 处均不可导，但其和函数 $f(x)+g(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导.

（2）命题成立.

原因：若 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 处可导，由 $f(x)$ 在 x_0 点处可导知 $g(x)=[f(x)+g(x)]-f(x)$ 在点 x_0 处也可导，矛盾.

2. $f'(x_0)$ 与 $[f(x_0)]'$ 有无区别？为什么？

答：$f'(x_0)$ 与 $[f(x_0)]'$ 有区别.

因为 $f'(x_0)$ 表示 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数；$[f(x_0)]'$ 表示 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值求导，即常数的导数，其结果为 0.

3. 给定一个初等函数，只用求导法一定能求出其导函数吗？为什么？

答:一定能求出其导函数.

因为任何一个基本初等函数我们都可以求其导函数,而初等函数是由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合运算形成,据复合函数的求导法则、导数的四则运算法则知给定一个初等函数,只用求导法一定能求出其导函数.

4. 求下列函数的导数(其中 a,b,c,n 为常数).

(1) $y=\sqrt{x}\left(x^2+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)$;　(2) $y=x^2\sin x+\cos x$;

(3) $y=x\ln x+\dfrac{\ln x}{x}$;　(4) $y=a^x\cdot x^a$;

(5) $y=\dfrac{\tan x}{1+\cos x}$;　(6) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;

(7) $y=x\sin x\cdot\ln x$;　(8) $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^n+1}$;

(9) $y=2^x(x\cos x+\sin x)$;　(10) $y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$;

(11) $y=\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)-\dfrac{1}{x}\arctan x$;　(12) $y=\dfrac{1}{18}\sin^6 3x-\dfrac{1}{24}\sin^8 3x$;

(13) $y=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$;　(14) $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解 (1) $y'=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(2) $y'=2x\sin x+x^2\cos x-\sin x$.

(3) $y'=\ln x+1+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

(4) $y'=a^x x^a\ln a+a^{x+1}x^{a-1}$.

(5) $$y'=\frac{\sec^2 x(1+\cos x)+\sin x\tan x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sec^2 x+\sec x+\sin^2 x\sec x}{(1+\cos x)^2}.$$

(6) $y'=2x[(x^2-4)(x^2-9)+(x^2-1)(x^2-9)+(x^2-1)(x^2-4)]$.

(7) $y'=\sin x+x\cos x\ln x+\sin x\ln x$.

(8) $$y'=\frac{(2ax+b)(x^n+1)-nx^{n-1}(ax^2+bx+c)}{(x^n+1)^2}.$$

(9) $$y'=2^x\ln 2(x\cos x+\sin x)+2^x(\cos-x\sin x+\cos x)=2^x[(x\cos x+\sin x)\ln 2+2\cos x-x\sin x].$$

(10) $$y'=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}+4\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}$$

$=2\sqrt{4-x^2}.$

(11) $y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2}\arctan x-\dfrac{1}{x(1+x^2)}$

$=\dfrac{\arctan x}{x^2}.$

(12) $y'=\sin^5 3x\cos 3x-\sin^7 3x\cos 3x=\sin^5 3x\cos^3 3x.$

(13) $y'=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)-\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=2\cos(\ln x).$

(14) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x-0}{x}=1,$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x}=1,$

所以　$f'(0)=1$，故

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

四、复合函数求导法则

1. 求下列复合函数的导数.

(1) $y=3\sin(3x+5)$；

(2) $y=\sqrt{3+4x}$；

(3) $y=\sin(\sin x)$；

(4) $y=\ln(\tan x)$；

(5) $y=\sec^3 3x$；

(6) $y=\ln(\arccos 2x)$；

(7) $y=\sqrt{1+\cos x}$；

(8) $y=\sin 3x+\cos\dfrac{x}{5}+\tan^2 x$；

(9) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$；

(10) $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$；

(11) $y=e^{\arcsin x}$；

(12) $y=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$；

解　(1) $y'=3\cos(3x+5)\cdot 3=9\cos(3x+5).$

(2) $y'=\dfrac{4}{2\sqrt{3+4x}}=\dfrac{2}{\sqrt{3+4x}}.$

(3) $y'=\cos(\sin x)\cos x.$

(4) $y'=\dfrac{1}{\tan x}\sec^2 x=\dfrac{1}{\sin x\cos x}.$

(5) $y'=3\sec^2 3x\sec 3x\tan 3x\cdot 3=9\sec^3 3x\tan 3x.$

(6) $y'=\dfrac{1}{\arccos 2x}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2$

$=\dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}\arccos 2x}.$

(7) $y'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$.

(8) $y'=3\cos 3x-\frac{1}{5}\sin\frac{x}{5}+2\tan x\sec^2 x$.

(9) $y'=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$.

(10) $f(t)=t\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}=te^{2t}$,

所以 $f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}$.

(11) $y'=e^{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(12) $y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}\sec^2\frac{x}{2}}{1+\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+3\cos^2\frac{x}{2}}$

$=\frac{1}{5+3\cos x}$.

2. 设 $f(x)=\ln(1+x)$，$y=f(f(x))$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y=f(f(x))=\ln[1+\ln(1+x)]$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\ln(1+x)}\cdot[1+\ln(1+x)]'$$

$$=\frac{1}{[1+\ln(1+x)](1+x)}.$$

3. 设 $y=f(u)$，$u=\sin x^2$，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot 2x\cdot\cos x^2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(u)\cdot 4x^2(\cos x^2)^2+f'(u)(2\cos x^2-4x^2\sin x^2).$$

4. 已知 $\frac{dy}{dx}=(a+x)(x+\sin x)^2$，且 $u=x+\sin x$，求 $\frac{dy}{du}$.

解 $\frac{du}{dx}=1+\cos x$，

$$\frac{dy}{du}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}}=\frac{(a+x)(x+\sin x)^2}{1+\cos x}.$$

五、取对数求导法

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^x$；　(2) $y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{(5-2x)(x-1)}}$；　(4) $y=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)}$.

解　(1) $y=e^{x\ln x}$，

$$y'=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(1+\ln x).$$

(2) $y=e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x)}$，

$$y'=e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x)}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\sin x+\frac{\cos x}{x\sin x}\right)=(\sin x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\cot x-\frac{1}{x^2}\ln\sin x\right).$$

(3) $\ln y=\dfrac{1}{2}[\ln(3x-2)-\ln(5-2x)-\ln(x-1)]$，

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{3x-2}-\frac{-2}{5-2x}-\frac{1}{x-1}\right],$$

所以　$y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3x-2}{(5-2x)(x-1)}}\cdot\left[\dfrac{3}{3x-2}+\dfrac{2}{5-2x}-\dfrac{1}{x-1}\right].$

(4) $\ln y=2\ln(x-3)+\ln(2x-1)-3\ln(x+1)$，

所以　$y'=\dfrac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}\cdot\left[\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{3}{x+1}\right].$

2. 求 $y=\left[\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3\cdot(x+4)}\right]^{\frac{2}{3}}$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　两边取对数：

$$\ln y=\frac{2}{3}[\ln(x+1)+\ln(x+2)+\ln(x+3)-3\ln x-\ln(x+4)],$$

两边关于 x 求导：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}y\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^3\cdot(x+4)}\right]^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x+4}\right).$$

3. 若 $y=x^y$，求 y'.

解　两边取对数得：$\ln y=y\ln x$，

两边关于 x 求导数得：$\dfrac{1}{y}y'=y'\ln x+\dfrac{y}{x}$，

整理得：$y'=\dfrac{y^2}{x-xy\ln x}$.

4. 设 $f(x)=x^{e^x}$，求 $f'(x)$.

解　令 $y=x^{e^x}$，两边取对数得：$\ln y=e^x\ln x$，

两边关于 x 求导得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=e^x\ln x+\frac{e^x}{x},$$

$$y'=y\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right)$$

即 $$y'=x^{e^x}\left(e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\right).$$

六、参数方程求导法

1. 求曲线 $\begin{cases}x=t,\\y=t^3\end{cases}$ 在点(1,1)处切线的斜率.

解 由题意知:

$$\begin{cases}1=t,\\1=t^3,\end{cases}\Rightarrow t=1,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{(t^3)'}{(t)'}\right|_{t=1}=3t^2|_{t=1}=3,$$

所以曲线在点(1,1)处切线的斜率为3.

2. 求下列参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\y=a\sin^3 t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\y=\frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}.\end{cases}$

解 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t.$

(2) $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \frac{dy}{dt}=\frac{1+t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$

所以 $$\frac{dy}{dx}=\frac{t+1}{t(t^2+1)}.$$

3. 证明曲线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ 上所有点的法线与原点的距离相等.

证明 $\frac{dy}{dx}=\frac{at\sin t}{at\cos t}=\tan t$,曲线上任一点的法线方程为

$$Y-a(\sin t-t\cos t)=-\cot t[X-a(\cos t+t\sin t)],$$

化简后为 $(\cos t)X+(\sin t)Y-a=0$,

原点至法线的距离 $d=|a|$.

4. 求曲线 $r=5(1-\cos\theta)$ 在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 所对应的点处的切线方程.

解 将曲线方程化为参数方程:$\begin{cases}x=5(1-\cos\theta)\cos\theta,\\y=5(1-\cos\theta)\sin\theta.\end{cases}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{5\cos\theta-5\cos 2\theta}{5\sin 2\theta-5\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+1.$$

所求的切线方程为 $y=(\sqrt{2}+1)x+\frac{5\sqrt{2}}{2}-5.$

七、隐函数求导法

1. 求由方程 $x+y-e^{2x}+e^{y}=0$ 所确定的隐函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 对方程两边关于 x 求导得

$$1+y'-2e^{2x}+e^{y}\cdot y'=0,$$

所以 $$y'=\frac{2e^{2x}-1}{1+e^{y}}.$$

2. 求下列函数所确定的隐函数的导数.

(1) $x^3-2x^2y^2+5x+y-5=0$，求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$；

(2) $2^x+2^y=2^{x+y}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(3) $(\cos y)^x=(\sin x)^y$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

解 (1) 将 $x=1$ 代入方程解得 $y_1=1, y_2=-\frac{1}{2}$，方程两端对 x 求导得

$$3x^2-4xy^2-4x^2yy'+5+y'=0,$$

$$y'=\frac{3x^2-4xy^2+5}{4x^2y-1}.$$

将 $x=1, y_1=1$ 代入得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4}{3}$；将 $x=1, y_2=-\frac{1}{2}$代入得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{7}{3}$.

(2) 方程两端对 x 求导：

$$2^x\ln 2+2^y\ln 2\cdot y'=2^{x+y}\ln 2\cdot(1+y'),$$

解得

$$y'=\frac{2^x-2^{x+y}}{2^{x+y}-2^y}=1-2^y.$$

(3) 先取对数：$x\ln(\cos y)=y\ln(\sin x)$，

方程两端对 x 求导：

$$\ln(\cos y)+x\frac{-\sin y}{\cos y}y'=y'\ln(\sin x)+y\frac{\cos x}{\sin x},$$

解得 $$y'=\frac{\ln(\cos y)-y\cot x}{x\tan y+\ln(\sin x)}.$$

3. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$在点$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线方程和法线方程.

解 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$,

$$y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}},y'|_{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a,y=\frac{\sqrt{2}}{4}a}=-1,$$

切线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$,即 $x+y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

法线方程为 $y-\frac{\sqrt{2}}{4}a=x-\frac{\sqrt{2}}{4}a$,即 $x-y=0$.

八、反函数的求导法则

1. 证明公式:

(1) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$;

(2) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}(-\infty\leqslant x\leqslant+\infty)$.

证明 (1)设 $y=\arccos x$,则 $x=\cos y$,所以 $\frac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2y}=-\sqrt{1-x^2}$,故 $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2)设 $y=\operatorname{arccot} x$,则 $x=\cot y$,所以

$$\frac{dx}{dy}=-\csc^2y=-(1+\cot^2y)=-(1+x^2),$$

故 $$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+x^2}.$$

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin x+\arccos x$; (2) $y=\arctan x\cdot\operatorname{arccot} x$;

(3) $y=e^x\arcsin x\cdot\ln x$.

解 (1)因为 $y=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

所以 $y'=0$.

(2) $y'=\frac{1}{1+x^2}\operatorname{arccot} x-\frac{1}{1+x^2}\arctan x=\frac{\operatorname{arccot} x-\arctan x}{1+x^2}$.

(3) $y'=e^x\arcsin x\ln x+\frac{e^x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x}e^x\arcsin x$.

3. 设 $f(x)$ 是单调可微函数 $g(x)$ 的反函数,而且 $g(1)=2,g'(1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,求 $f'(2)$.

解 依题设条件可知 $f(2)=1,f'(2)=-\sqrt{3}$.

九、高阶导数

1. 求下列函数的二阶导数：

(1) $y=e^{2x}\sin 3x$；　　(2) $y=\dfrac{2x^3+\sqrt{x}+4\arctan x}{x}$；

(3) $y=x^x(x>0)$；　　(4) $y=\dfrac{1}{1-x^3}$.

解 (1) $y'=2e^{2x}\sin 3x+3e^{2x}\cos 3x=e^{2x}(2\sin 3x+3\cos 3x)$，

$y''=e^{2x}(4\sin 3x+6\cos 3x+6\cos 3x-9\sin 3x)=e^{2x}(12\cos 3x-5\sin 3x)$.

(2) $y=2x^2+x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{4}{x}\arctan x$，

$$y'=4x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{4}{x^2}\arctan x+\frac{4}{x(1+x^2)},$$

$$y''=4+\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}-4\left(-\frac{2\arctan x}{x^3}+\frac{1}{x^2(1+x^2)}\right)-\frac{4(1+3x^2)}{(x+x^3)^2}.$$

(3) $y=e^{x\ln x}$，

$y'=e^{x\ln x}(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$，

$$y''=e^{x\ln x}\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]=x^x\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right].$$

(4) $y'=\dfrac{3x^2}{(1-x^3)^2}$，

$$y''=\frac{3[2x(1-x^3)^2+6x^4(1-x^3)]}{(1-x^3)^4}=\frac{6x[1+2x^3]}{(1-x^3)^3}.$$

2. 设$f(u)$为二次可微函数，求 $y=f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$的二阶导数.

解 $y'=f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right)(-2x^{-3})$，

$$y''=f''\left(\frac{1}{x^2}\right)(-2x^{-3})^2+f'\left(\frac{1}{x^2}\right)6x^{-4}.$$

3. 求方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所确定的隐函数的二阶导数$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0,y=b}$.

解 $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{b^2}=0$，即 $xb^2+a^2yy'=0$，

再求导得 $b^2+y'^2a^2+a^2yy''=0$，$y'|_{x=0,y=b}=0$，$y''|_{x=0,y=b}=-\dfrac{b}{a^2}$.

4. 已知 $x=\arctan t$，$y=\ln(1+t^2)$，$t\in(-\infty,+\infty)$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{2}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2)\quad(t\neq 0).$$

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y$ 确定,其中 f 具有二阶导数且 $f'\neq 1$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　方程两边对 x 求导 $e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'(y)y'=e^y y'$,

从而
$$y'=\frac{e^{f(y)}}{e^y-xe^{f(y)}f'(y)}=\frac{1}{x(1-f'(y))},$$

$$y''=-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

6. 设 $y=(x^2+x+1)\cos 2x$,利用莱布尼茨公式求 $y^{(15)}$.

解
$$\begin{aligned}y^{(15)}&=C_{15}^0(x^2+x+1)(\cos 2x)^{(15)}+C_{15}^1(x^2+x+1)'(\cos 2x)^{(14)}\\&\quad+C_{15}^2(x^2+x+1)''(\cos 2x)^{(13)}\\&=(x^2+x+1)\cdot 2^{15}\cdot\cos\left(2x+\frac{15\pi}{2}\right)+15(2x+1)\cdot 2^{14}\cdot\cos\left(2x+\frac{14\pi}{2}\right)\\&\quad+\frac{15\cdot 14}{2}\cdot 2\cdot 2^{13}\cos\left(2x+\frac{13\pi}{2}\right)\\&=2^{15}(x^2+x+1)\sin 2x-2^{14}(30x+15)\cos 2x-210\cdot 2^{13}\sin 2x.\end{aligned}$$

7. 求下列函数的 n 阶导数.

(1) $y=\ln(x-2)$;　　(2) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$;

(3) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;　　(4) $y=\sin ax\cos bx$ (a,b 为常数).

解　(1) $y'=\frac{1}{x-2}$,

$$y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=(-1)^{(n-1)}(n-1)!\ (x-2)^{-n}.$$

(2) $y=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$,

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=(-1)^n n!\ \frac{1}{(x-2)^{n+1}}-(-1)^n n!\ \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\\&=(-1)^n n!\ \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}y&=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x\\&=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,\end{aligned}$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\cdot 4^n\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(4) $y=\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]$,

所以　$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^n\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+(a-b)^n\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]\right\}$.

8. 设$f(x)=x^2\sin x$,求$f^{(10)}(0)$。

解　$f^{(10)}(x)=(\sin x)^{(10)}x^2+10(\sin x)^{(9)}\cdot(x^2)'+\frac{10\times9}{2!}(\sin x)^{(8)}\cdot(x^2)''$.

所以　$f^{(10)}(0)=10\times9\sin(0+4\pi)=0$.

9. 有一个长度为5 m的梯子靠在墙上,设其下端沿地板以3 m/s的匀速离开墙脚滑动,(1)当其下端离墙脚1.4 m时,梯子上端下滑的速率是多少?(2)何时梯子上下端滑动的速率相同?(3)何时其上端下滑的速率是4 m/s?

解　依题意有$x^2(t)+y^2(t)=25$,等式两端对t求导有

$$2x\cdot x_t'+2y\cdot y_t'=0. \tag{a}$$

(1)$y_t'|_{x=1.4}=-\frac{x}{y}x_t'|_{x=1.4,y=4.8}=-\frac{7}{24}\times3=-\frac{7}{8}$(m/s).

(2)令$y_t'=-3$(m/s)代入(a)式得$x=y=5\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)令$y_t'=-4$(m/s)代入(a)式得$3x-4y=0$,因为$x^2+y^2=25$,所以$y=3$.

10. 注水入深8 m,上顶直径8 m的倒置的正圆锥形容器中,其速率为4 m^3/min,当水深为5 m时,其表面上升的速率是多少?

解　直线OA方程为$h(t)=2R(t)$,在时刻t,容器中水的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(t)h(t)=\frac{1}{12}\pi h^3(t),$$

两端对t求导有

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi h^2(t)}{4}\cdot\frac{dh}{dt},\ \left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=5}=\frac{25\pi}{4}\cdot\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}.$$

已知$\frac{dV}{dt}=4$,所以$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}=\frac{16}{25\pi}$.

十、微分及其在近似计算中的应用

1. 设$y=f(x)$在点x_0的某邻域有定义,且$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+b(\Delta x)^2$,其中$a,b$为常数,下列命题哪个正确?

(1)$f(x)$在点x_0处可导,且$f'(x_0)=a$.

(2)$f(x)$在点x_0处可微,且$df(x)|_{x=x_0}=adx$.

(3)$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+a\Delta x$($|\Delta x|$很小时).

答:(1),(2),(3)三个命题全正确.

2. 可导与可微有何关系?其几何意义分别表示什么?有何区别?

答:对于一元函数来说,$f(x)$在x_0处可导与可微均表示曲线$y=f(x)$在x_0处存在切线,$f'(x_0)$表示切线的斜率,$df(x)|_{x=x_0}$表示切线纵坐标的改变量.

3. 用微分进行近似计算的理论依据是什么?

答：理论依据为：当 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微时，$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$.

所以当 Δx 很小时，有 $\Delta y\approx \mathrm{d}y$.

4. $f(x)$ 在一点可微、可导、连续间有何关系？

答：关系如图 4-1 所示.



图 4-1

5. 求 $\sqrt[3]{1.02}$，$\sin 29°$ 的近似值.

解　由 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$，得

$$\sqrt[3]{1.02}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Big|_{x=1}\times 0.02=1+\frac{1}{3}\times 0.02\doteq\frac{151}{150}.$$

同理 $\sin 29°\approx\sin 30°+\cos x|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{360}.$

6. 求下列函数的微分.

(1) $y=x^2+\sin x$；　　(2) $y=\tan x$；

(3) $y=xe^x$；　　(4) $y=(3x-1)^{100}$.

解　(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x+\cos x$，$\mathrm{d}y=(2x+\cos x)\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}y=\sec^2 x\mathrm{d}x$.

(3) $\mathrm{d}y=e^x(1+x)\mathrm{d}x$.

(4) $\mathrm{d}y=100(3x-1)^{99}(3x-1)'\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}y=300(3x-1)^{99}\mathrm{d}x$.

7. 设 $f(x)=\ln(1+x)$，求 $\mathrm{d}f(x)|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}$.

解　$\mathrm{d}f(x)|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=f'(2)\times 0.01=\frac{1}{1+x}\Big|_{x=2}\times 0.01=\frac{1}{300}.$

8. 求函数 $y=5x+x^2$ 当 $x_0=2$，$\Delta x=0.001$ 时的改变量 Δy 和微分 $\mathrm{d}y$.

解　$\Delta y=5(x_0+\Delta x)+(x_0+\Delta x)^2-5x_0-x_0^2=5\Delta x+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$,

$\Delta y|_{x_0=2,\Delta x=0.001}=5\times 0.001+2\times 2\times 0.001+(0.001)^2=0.009\ 001.$

$\mathrm{d}y|_{x_0=2,\Delta x=0.001}=(5+2\times 2)\times 0.001=0.009.$

9. 圆半径增加 1 cm，这圆面积的微分是 $6\pi\ \mathrm{cm}^2$，求圆的原半径.

解　设圆半径为 R，其增量 $\Delta R=1$，圆面积 $S=\pi R^2$，$\mathrm{d}S=2\pi R\Delta R$.

故 $R=\frac{\mathrm{d}S}{2\pi\Delta R}=\frac{6\pi}{6\pi\cdot 1}=3(\mathrm{cm})$.

10. 求下列显函数或隐函数的微分 $\mathrm{d}y$.

(1) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$；

(3) $y=\sin^2(1+2x^2)$;　　　(4) $\tan y=x+y$.

解　(1) $dy=\dfrac{\dfrac{-x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(1-x^2)}}=\dfrac{-x\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{1-x^2}}(x\neq 0)$;

(2) 两边取微分得 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}}{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

所以　$\mathrm{d}y=\dfrac{x+y}{x-y}\mathrm{d}x$.

(3) $\mathrm{d}y=2\sin(1+2x^2)\cdot\cos(1+2x^2)\cdot 4x\mathrm{d}x=4x\sin(2+4x^2)\mathrm{d}x$.

(4) 两边取微分得: $\sec^2 y\cdot \mathrm{d}y=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$,

所以　$\mathrm{d}y=\cot^2 y\cdot \mathrm{d}x$.

11. 导出近似公式(当 $|\Delta x|$ 远远小于 $|x|$ 时) $\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\dfrac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$, 并按此公式求 $\sqrt[3]{25}$ 的近似值,结果取小数点后四位.

解　设 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$,

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x,\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

从而有

$$\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}\approx\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}},\text{即 }\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

因为 $\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{27-2}=3\left(1-\dfrac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$.

令 $x=1,\Delta x=-\dfrac{2}{27}$, 则 $\left(1-\dfrac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\approx\sqrt[3]{1}+\dfrac{-\dfrac{2}{27}}{3\sqrt[3]{1}}=1-\dfrac{2}{81}=\dfrac{79}{81}$,

所以 $\sqrt[3]{25}\approx 3\cdot\dfrac{79}{81}=\dfrac{79}{27}=2.925\,9$.

12. 扩音器插头为圆柱形,截面半径 r 为 0.15 cm,长度 l 为 4 cm,现为了提高它的导电性,把这圆柱的侧面镀上一层厚为 0.001 cm 的纯铜,问约需多少纯铜(铜的密度为 8.9 g/cm^3)

解　未镀铜前圆柱体体积为 $V=\pi r^2 l$,所镀铜的体积约为

$$dV=2\pi rl dr, r=0.15, l=4, dr=0.001,$$

代入得 $dV=0.0012\pi(\text{cm})^3$，所需铜约为 $8.9\times0.0012\pi=0.0336(\text{g})$.

13. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$，半径 $R=100$ cm，如果 R 不变，α 减少了 $30'$，问扇形面积大约改变了多少？又如果 α 不变，R 增加 1 cm，问扇形面积大约改变了多少？

解 扇形面积 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$，当 $R=100,\alpha=\frac{\pi}{3},\Delta\alpha=-\frac{\pi}{360}$ 时，

$$\Delta S\approx dS=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha=\frac{1}{2}\times10\,000\times\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-\frac{125}{9}\pi(\text{cm}^2).$$

当 $R=100,\alpha=\frac{\pi}{3},\Delta R=1$ 时，$\Delta S\approx dS=\alpha R dR=\frac{\pi}{3}\times100\times1=\frac{100\pi}{3}(\text{cm}^2)$.

第五章　中值定理与导数应用

一、中值定理

1. 罗尔中值定理是微分中值定理中一个最基本的定理，仔细阅读下面给出的罗尔中值定理的条件与结论，并回答下列问题.

罗尔中值定理：若$f(x)$满足如下三条：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续；

(2)在开区间(a,b)内可导；

(3)在区间$[a,b]$端点处的函数值相等，即$f(a)=f(b)$.

则在开区间(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$.

需回答的问题：

(1)罗尔中值定理与拉格朗日中值定理的联系与区别？

(2)罗尔中值定理中条件(1)换为“在开区间(a,b)内连续”，定理的结论还成立吗？

(3)不求$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数，说明方程$f'(x)=0$有几个实根，并指出它们所在的区间.

答：(1)罗尔中值定理是拉格朗日中值定理的一个特殊情况. 反之，拉格朗日中值定理是罗尔中值定理的推广.

(2)不成立. 如果仅在开区间连续，则函数就有可能在$x=a$或$x=b$处间断. 此时虽然有$f(a)=f(b)$，也不能保证$f(x)$在(a,b)存在ξ，使得$f'(\xi)=0$，如图5-1.

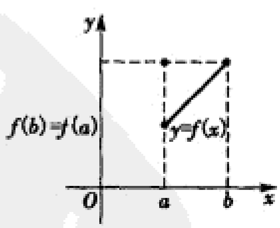


图5-1

(3)方程$f'(x)=0$有3个实根，分别在区间$(1,2)$、$(2,3)$、$(3,4)$内.

原因：由$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，根据罗尔定理可得出结果.

2. 将拉格朗日中值定理中条件$f(x)$“在闭区间$[a,b]$上连续”换为“在开区间(a,b)内连续”后，定理是否还成立？试举例(只需画图)说明.

答：不成立. 原因与罗尔定理中相同.

3. 举例说明罗尔中值定理与拉格朗日中值定理的条件是充分的而非必要的(可

采用画图方式说明).

答:如下图 5-2、5-3 所示.

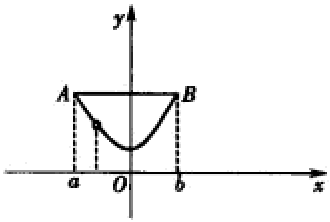


图 5-2

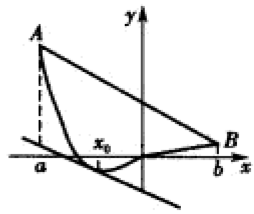


图 5-3

图 5-2 说明了罗尔定理的条件是充分但不必要的. 在此图中,$f(x)$ 虽然在 $[a,b]$ 上不连续,但曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线仍然平行于 x 轴. 即在 $x=0$ 时,$f'(x)=0$.

图 5-3 说明了拉格朗日定理的条件是充分但不必要的. 在此图中,$f(x)$ 虽然在 $x=0$ 时不可导,但 $f(x)$ 在 x_0 处的切线仍然平行于 AB,即在 x_0 处,$f'(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. 验证函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件,并求出中值 ζ.

解 $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=y\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\ln\dfrac{1}{2}$,$y'=\dfrac{1}{\sin x}\cos x=\cot x$.

则 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件.

令 $y'=0$,得 $x=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\zeta=\dfrac{\pi}{2}$.

5. 验证函数 $f(x)=\begin{cases}2-\ln x, & \dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}+1, & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{e},3\right]$ 上满足拉格朗日定理的条件,并求出中值 ζ.

解 因 $f(1-0)=f(1+0)=f(1)=2$,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{e},3\right]$ 上满足拉格朗日定理的条件.

又 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{e}\leqslant x<1,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1<x\leqslant 3,\end{cases}$ 而 $\dfrac{f(3)-f\left(\dfrac{1}{e}\right)}{3-\dfrac{1}{e}}=\dfrac{-5e}{3(3e-1)}=\dfrac{-5e}{9e-3}$.

令 $f'(x)=\dfrac{-5e}{9e-3}$,解得 $x_1=\dfrac{9e-3}{5e}$,$x_2=\sqrt{\dfrac{9e-3}{5e}}$,因为 $x_1\notin\left[\dfrac{1}{e},1\right]$,则 x_1 舍去,故

取 $\zeta=\sqrt{\dfrac{9e-3}{5e}}$.

6. $f(x)$ 在 $[a,b]$ $(0<a<b)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$ $(a<x<b)$，$af(b)-bf(a)=0$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$.

证明　设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，由题设知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

又
$$F(a)=\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}=F(b),$$

由罗尔定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=\xi$.

7. 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=c$（常数），证明 $f(x)$ 是关于 x 的一次函数.

证明　因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续可导，所以 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件. 对所有 x，$f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，所以

$$f(x)-f(0)=f(\zeta)(x-0),\zeta\in(0,x).$$

由于 $f'(\zeta)=c$，因此 $f(x)=cx+f(0)$，记 $b=f(0)$，有 $f(x)=cx+b$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导. 连接点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 的直线段交曲线 $y=f(x)$ 于 $C(c,f(c))$ 处，此处 $a<c<b$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明　$f(x)$ 在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上满足拉格朗郎日中值定理，因此，至少分别存在一点 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$ 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

由 A,B,C 三点位于同一直线上，因此 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，不妨设 $\xi_1<\xi_2$，在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足罗尔定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=0.$$

9. 用中值定理证明不等式.

(1) 当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；

(2) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

(3) 当 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\leqslant\tan\alpha-\tan\beta\leqslant\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$.

证明　(1) 令 $f(x)=\ln(1+x)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，

在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\zeta}x,\zeta\in(0,x).$$

由于 $1+x>1+\zeta>1$，则 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\zeta}<x$，

所以 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

(2) $f(x)=\arctan x$，$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\arctan b-\arctan a=\frac{1}{1+\zeta^2}(b-a),\zeta\in(a,b).$$

因为 $\frac{1}{1+\zeta^2}<1$，$\left|\frac{1}{1+\zeta^2}(a-b)\right|<|a-b|$.

所以 $|\arctan a-\arctan b|<|a-b|$. 当 $a=b$ 时，显然等号成立.

(3) 令 $f(x)=\tan x$，则 $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$，在 $[\beta,\alpha]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\zeta},0<\beta<\zeta<\alpha<\frac{2}{\pi}.$$

所以 $\cos^2\beta>\cos^2\zeta>\cos^2\alpha$，故 $\frac{1}{\cos^2\beta}<\frac{1}{\cos^2\zeta}<\frac{1}{\cos^2\alpha}$，

则 $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\zeta}<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$，即 $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$；$\alpha=\beta$ 时，等式显然成立.

10. 设函数 $f(x)$ 定义于 $[0,c]$，$f'(x)$ 存在且单调下降，$f(0)=0$. 证明 对于 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$ 时，有 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

证明 当 $a>0$ 时，对 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=f'(\zeta)$，即 $\frac{f(a)}{a}=f(\zeta_1)$，$\zeta_1\in(0,a)$.

对 $f(x)$ 在 $[b,a+b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{(a+b)-b}=f'(\zeta_2)\text{，即}\frac{f(a+b)-f(b)}{a}=f'(\zeta_2),\zeta_2\in(b,a+b).$$

显然 ζ_1,ζ_2 均在 $[0,c]$ 上单调下降，且 $0<\zeta_1<a\leqslant b<\zeta_2<a+b\leqslant c$. 又因为 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 上单调下降，$f(\zeta_1)\geqslant f'(\zeta_2)$. 即 $\frac{f(a)}{a}\geqslant\frac{f(a+b)-f(b)}{a}$，也即 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$. 当 $a=0$ 时，不等式变为等式.

11. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，但无界，证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界.

证明 用反证法，假设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，即存在 $M>0$，使对一切 $x\in(a,b)$，有 $|f'(x)|\leqslant M$. 在 (a,b) 内任取一点 x_0，$f(x_0)$ 为常数，x 为 (a,b) 内任一点，由拉格朗日中值定理，有 $f(x)=f(x_0)+f'(\zeta)(x-x_0)$ 有，ζ 介于 x_0 与 x 之间. 从而有

$$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\zeta)||x-x_0|\text{，即}|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+M(b-a).$$

因而 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界，与已知矛盾，因此 $f'(x)$ 在 (a,b) 内无界.

二、洛必达法则

1. 用洛必达法则求下列极限：

$(1)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　$(2)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin x}{x}$；　$(3)\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$；　$(4)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x^2+2x-\sin x}{x^4-x}$.

解　$(1)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{1}=2.$

$(2)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x=1.$

$(3)\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos(x-\pi)}{1}=1.$

$(4)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-3x^2+2x-\sin x}{x^4-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-6x+2-\cos x}{4x^3-1}=\dfrac{2-1}{0-1}=-1.$

2. 用洛必达法则求下列极限：

$(1)\lim\limits_{x\to0^+}x^x$；　　　　$(2)\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$(1)\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=1.$

$(2)\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+1}}=e.$

3. 设$f(x)=x^2-x$，直接用柯西中值定理求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin x}$.

解　因为$f(0)=0,\sin 0=0$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\sin x-\sin 0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{\sin'(\xi)}(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})=\lim_{\xi\to0}\frac{2\xi-1}{\cos\xi}=-1.$$

4. 求下列极限：

$(1)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$；　　$(2)\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi x}{2}}{\cot\pi x}$；

$(3)\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$；　　$(4)\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$；

$(5)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$；　　$(6)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

$(7)\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$；　　$(8)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

解　(1)原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

(2)原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{1-x}}{-\pi\csc^2\pi x}=-\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{\pi}{2}\sin^2\pi x\cdot\sec^2\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\sin^2\pi x}{1-x}\right]$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1}\left[2\pi\sin^2\frac{\pi}{2}x-\frac{\sin^2\pi x}{1-x}\right] = -2+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\pi x}{1-x} = -2.$$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\tan^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^2x-x^2}{x^2\cdot x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}\right)=2\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln\frac{\sin t}{t}}{t^2}\left(令 x=\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^2\sin t}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{-t\sin t}{6t^2}=-\frac{1}{6}.$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\cos\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-\tan x)}=1.$

(6) 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}}=e^{-1}.$

(7) 令 $t=1-x$，原式 $=\lim\limits_{t\to0}t\cot\frac{\pi}{2}t$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan\frac{\pi}{2}t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\sec^2\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{e}{2}.$

4. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，$f''(x)=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=2.$$

则
$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$$

5. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，证明 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f'(0), & x=0\end{cases}$ 可导，且导函数连续.

证明　由已知，$g(x)$ 连续，且当 $x\neq0$ 时，$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，而

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0).$$

当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)$ 显然连续. 而 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0)$.

$g'(x)$ 在点 $x=0$ 连续，从而 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数.

三、函数的单调性

1. 讨论函数 $y=e^{-x^2}$ 的单调性.

解　函数 $y=e^{-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$y'=-2xe^{-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x=0$，用 $x=0$ 把 $(-\infty,+\infty)$ 分成两部分 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f'(x)>0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，

因此 $y=e^{-x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

2. 求下列函数的单调区间.

(1) $f(x)=x^4-2x^2-5$；

(2) $f(x)=2\sin x+\cos 2x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

解　(1) $f(x)=x^4-2x^2-5$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1),$$

令 $f'(x)=0$ 解得驻点为 $x_1=0,x_2=1,x_3=-1$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 及 $(0,1)$ 时 $f'(x)<0$；当 $x\in(-1,0)$ 及 $(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 的单调减少区间是 $(-\infty,-1)$，$(0,1)$；单调增加区间是 $(-1,0)$，$(1,+\infty)$.

(2) $f'(x)=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x)(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，

令 $f'(x)=0$ 解得驻点 $x_1=\frac{\pi}{2},x_2=\frac{3\pi}{2},x_3=\frac{\pi}{6},x_4=\frac{5\pi}{6}$.

当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时 $f'(x)<0$；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$ 及 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时 $f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 的单调减少区间是 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$；单调增加区间是 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$ 及 $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

3. 利用函数的单调性证明 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$.

解　令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续而且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}>0(x>0),$$

因而$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，$x>0$时，$f(x)>f(0)$，所以$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>0$ $(x>0)$，因而$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}(x>0)$.

四、函数的极值与最值

1. 画图说明闭区间上连续函数$f(x)$的极值与最值之间的关系.

答：图像如图5-4所示.

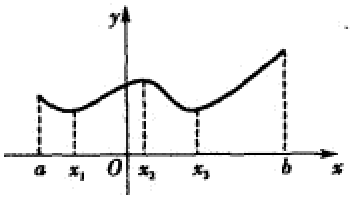


图5-4

由图可知，函数$f(x)$的极值与最值的关系为：$f(x)$的极值可能为最值，最值在极值点及边界点上的函数值中取得.

2. 可能极值点有哪几种？如何判定可能极值点是否为极值点？

答：对连续函数来说，可能极值点有驻点及函数一阶导数不存在的点（尖点）两种. 利用极值的第一充分条件或第二充分条件判定.

3. 求$f(x)=x^3+3x^2$在闭区间$[-5,5]$上的极大值与极小值，最大值与最小值.

解　$f'(x)=3x^2+6x$，令$f'(x)=0$，得$x_1=0,x_2=-2$，

$f''(x)=6x+6$，$f''(0)=6>0$，$f''(-2)=-6<0$，

所以$f(x)$的极大值为$f(-2)=4$，极小值为$f(0)=0$.

因$f(-5)=-50$，$f(5)=200$. 则比较$f(-5)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(5)$的大小可知：$f(x)$最大值为200，最小值为-50.

4. 求函数$y=x+\sqrt{1-x}$在$[-5,1]$上的最大值.

解　$y'=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$，令$y'=0$，得$x=\frac{3}{4}$. 因$y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$，$y(-5)=\sqrt{6}-5$，$y(1)=1$，比较可知$y=x+\sqrt{1-x}$在$[-5,1]$上最大值为$y=\frac{5}{4}$.

5. 求$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$的极值.

解　$f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$，$x=0$为驻点.

n为奇数时，$x<0$时，$f'(x)>0$；$x>0$时$f'(x)<0$，故$x=0$为极大值点，极大值为1.

n为偶数时，$f'(x)\leqslant 0$，所以函数无极值.

6. 求数列 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 中的最大项.

解　令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，则 $f(x)$ 在 $x=e$ 时取极大值 $e^{\frac{1}{e}}$，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上递增，在 $[e,+\infty)$ 上递减，因而 $f(1)<f(2)$，$f(3)>f(4)>f(5)\cdots$，$f(2)=\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{3}=f(3)$，所以最大项为 $x_3=\sqrt[3]{3}$.

7. 设 $f(x)=a\sin x+\frac{b}{3}\sin 3x$ 且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，问 a,b 取何值时 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 时取极值，并问是极大值还是极小值，并求出该极值.

解　$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a-\frac{b}{3}=1$，$a=1+\frac{b}{3}$，$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\frac{b}{3}\right)\frac{1}{2}-b=0$，$b=\frac{3}{5}$，$a=\frac{6}{5}$，$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{5}\sqrt{3}<0$，$x=\frac{\pi}{3}$ 是极大值点，极大值为 $\frac{3}{5}\sqrt{3}$.

8. 曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\ (x>0,y>0)$ 的切线与两坐标轴围成一个三角形，问切点在何处时三角形的面积最大.

解　因为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，所以 $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{y'}{2\sqrt{y}}=0$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$，曲线在 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $Y-y_0=-\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(X-x_0)$，化简为 $\frac{X}{\sqrt{x_0}}+\frac{Y}{\sqrt{y_0}}=1$，它在两坐标轴上的截距分别为 $\sqrt{x_0}$ 和 $\sqrt{y_0}$. 三角形面积 $s=\frac{1}{2}\sqrt{x_0y_0}=\frac{1}{2}\sqrt{x_0}(1-\sqrt{x_0})$，$\frac{ds}{dx_0}=\frac{1}{4\sqrt{x_0}}-\frac{1}{2}$. 当 $x_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 时，$\frac{ds}{dx_0}>0$，$x_0\in\left(\frac{1}{4},1\right)$ 时，$\frac{ds}{dx_0}<0$. 所以 $x_0=\frac{1}{4}$ 时，s 取最大值. 因此所求切点为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

9. 证明不等式：$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1\ (0\leqslant x\leqslant 1,p>1)$.

证明　令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，$x\in(0,1)$.

由 $f'(x)=0$，即 $p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]=0$，解得驻点 $x=\frac{1}{2}$. 又 $f(0)=1$，$f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 1，最小值为 $\frac{1}{2^{p-1}}$. 故有

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1\quad (0\leqslant x\leqslant 1,p>1).$$

五、曲率

1. 对圆来说，其半径与其曲率半径相等吗？为什么？

答：相等. 因为曲率半径 $R=\frac{1}{\left|\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|}=\frac{1}{\left|\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{r\cdot\Delta\alpha}\right|}=r.$

2. 是否存在负曲率，为什么？

答：不存在. 因为曲率定义为 $K=\left|\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$，故可知曲率为非负的值.

3. 求立方抛物线 $y=ax^3\ (a>0)$ 上各点处的曲率，并求 $x=a$ 处的曲率半径.

解 $y'=3ax^2, y''=6ax$，于是曲率

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\left|\frac{6ax}{(1+9a^2x^4)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

当 $x=a$ 时曲率 $K=\frac{6a^2}{(1+9a^6)^{\frac{3}{2}}}$，故曲率半径 $R=\frac{1}{K}=\frac{(1+9a^6)^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$.

4. 曲线 $y=x^3\ (x\geqslant 0)$ 上哪一点处曲率最大，求出该点的曲率.

解 $y'=3x^2, y''=6x$，故曲率

$$K=\left|\frac{6x}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{6x}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}\quad(x\geqslant 0),$$

对 K 关于 x 求导，得

$$\frac{dK}{dx}=\left(1-\frac{54x^4}{1+9x^4}\right)\frac{6}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$$，令 $\frac{dK}{dx}=0$ 且 $x\geqslant 0$，得 $x=\sqrt[4]{\frac{1}{45}}$.

因为 $0\leqslant x<\sqrt[4]{\frac{1}{45}}$ 时，$\frac{dk}{dx}>0$；$x>\sqrt[4]{\frac{1}{45}}$ 时，$\frac{dk}{dx}<0$，所以曲线 $y=x^3\ (x\geqslant 0)$ 上，$(45^{-\frac{1}{4}}, 45^{-\frac{3}{4}})$ 处曲率最大，最大曲率为 $K=\frac{5}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$.

5. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在顶点处的曲率及曲率半径.

解 $y'=2x-4, y''=2$，顶点为 $A(2,-1)$.

因为 $y'|_A=0$，$K_A=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_A=\frac{2}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=2$，所以 $R=\frac{1}{2}$.

6. 求曲线 $y^2=8x$ 在 $(2,4)$ 点处的曲率，曲率半径及曲率中心.

解 $y^2=8x, A(2,4), y'=\frac{4}{y}, y''=-\frac{4y'}{y^2}, y'|_A=1, y''|_A=-\frac{1}{4}$.

$$K_A=\left.\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right|_A=\frac{\left|-\frac{1}{4}\right|}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{4}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

所以 $R=\frac{1}{K}=8\sqrt{2}$，由曲率中心计算公式得曲率中心为 $C(10,-4)$.

7. 求曲线 $y=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 的最大曲率.

解 $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, y''=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\left[1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2},x\in(-\infty,+\infty).$$

$K'=0$ 得 $e^x-e^{-x}=0$,所以 $x=0$,当 $x<0$ 时,$K'>0$,当 $x>0$ 时,$K'<0$,所以在 $x=0$ 时 K 取最大值,$K_{\max}=\frac{4}{2^2}=1$.

8. 曲线弧 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 上哪一点处曲率半径最小?求出该点处的曲率半径.

解 $y'=\cos x,y''=-\sin x,x\in(0,\pi)$,

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2x)^{\frac{3}{2}}},x\in(0,\pi).$$

由上式可知:当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,K 最大,即当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时曲率半径最小.

故曲线 $y=\sin x,x\in(0,\pi)$ 在 $(\frac{\pi}{2},1)$ 点处曲率半径最小,最小值 $R=1$

9. 求对数曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点.

解 $y=\ln x,y'=\frac{1}{x},y''=-\frac{1}{x^2}$.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},K'=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $K'=0$,得 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 时,$K'>0$,当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ 时,$K'<0$,所以在点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{\ln 2}{2}\right)$ 处曲率 K 有最大值 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

10. 证明:曲线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 在任何点处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

证明 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a},y'=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}=\operatorname{sh}\frac{x}{a},y''=\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\left(1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\left(\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a}{a^2\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}}=\frac{a}{y^2}.\text{ 故 }R=\frac{y^2}{a}.$$

六、函数图形的描绘

1. 若 $(x_0,f(x_0))$ 为连续曲线弧 $y=f(x)$ 的拐点,问:

(1) $f(x_0)$ 有无可能是 $f(x)$ 的极值,为什么?

(2)$f'(x_0)$是否一定存在？为什么？画图说明.

答:(1)可能.

例如:$y(x)=\begin{cases}x^2, x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, x>0.\end{cases}$

(0,0)为 $y=y(x)$ 的拐点且 $y(0)$ 为 $y(x)$ 的极值.

(2)不一定. 如 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 图像如右图 5-5.

(0,0)点为曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的拐点,但 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 不存在.

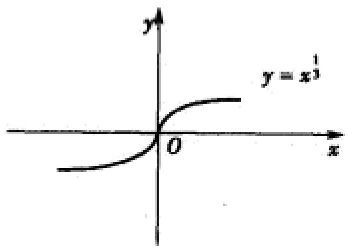


图 5-5

2. 根据下列条件,画曲线.

(1)画出一条曲线,使得它的一阶和二阶导数处处为正.

(2)画出一条曲线,使得它的二阶导数处处为负,但一阶导数处处为正.

(3)画出一条曲线,使得它的二阶导数处处为正,但一阶导数处处为负.

(4)画出一条曲线,使得它的一阶、二阶导数处处为负.

解 (1)如图 5-6(a).

(2)如图 5-6(b).

(3)如图 5-6(c).

(4)如图 5-6(d).

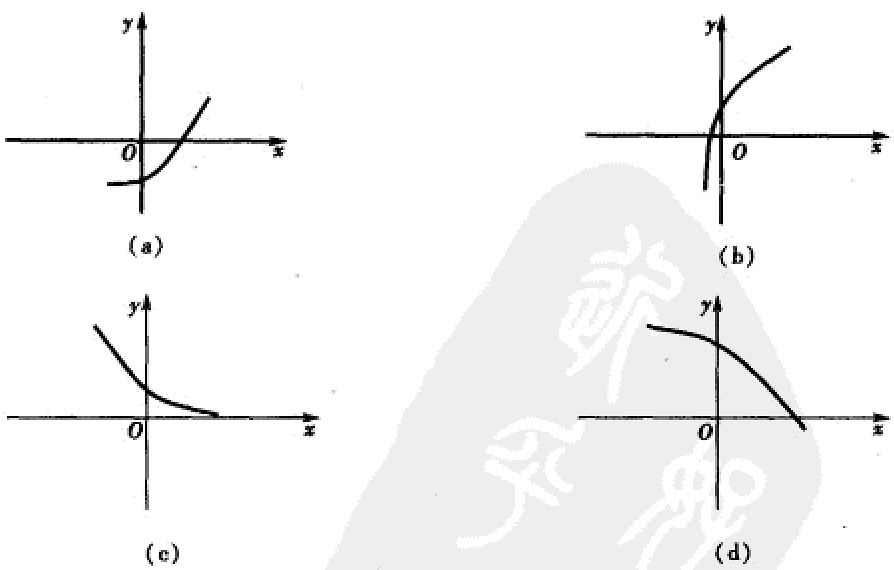


图 5-6

3. 设水以常速 a m^3/s($a>0$)注入如图 5-7 所示的容器中,请作出水上升的高度关于时间 t 的函数 $y=f(t)$ 的图像,阐明凹向,并指出拐点.

解　函数图像如图 5-8 所示：

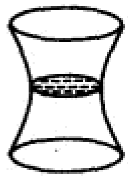


图 5-7

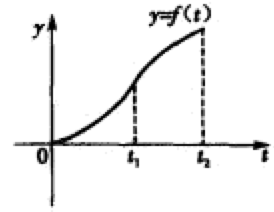


图 5-8

在区间$[0,t_1]$上函数 $y=f(t)$ 的图像上凹，在区间$[t_1,t_2]$上函数 $y=f(t)$ 的图像下凹，点$(t_1,f(t_1))$为函数图像的拐点.

4. 回答下列问题.

(1)$f'(x)$的图像如图 5-9 所示，试根据该图像指出函数$f(x)$本身拐点横坐标 x 的值；

(2)在图 5-10 的二阶导数$f''(x)$的图像中，指出函数$f(x)$本身拐点横坐标 x 的值.

答：(1)拐点横坐标为 $x=x_3$ 与 $x=x_4$.

(2)拐点横坐标为 $x=x_1$ 和 $x=x_2$.

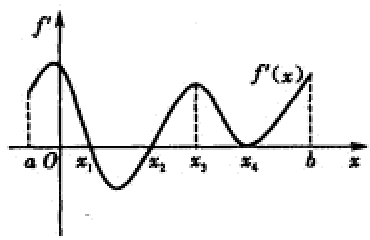


图 5-9

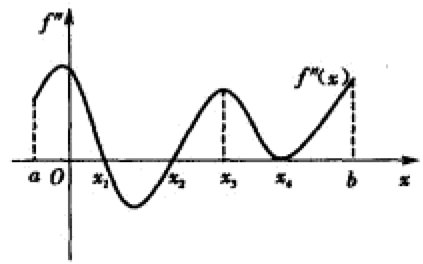


图 5-10

5. 求曲线 $y=10+5x^2+\frac{10}{3}x^3$ 的凹凸区间与拐点.

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

$y'=10x+10x^2$，　$y''=10+20x$，

令 $y''=0$，得 $x=-\frac{1}{2}$.

用 $x=-\frac{1}{2}$把$(-\infty,+\infty)$分成$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$两部分.

当 $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$时，$y''<0$，当 $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$y''>0$，

所以曲线的凹区间为$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，凸区间为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，拐点为$\left(-\frac{1}{2},\frac{65}{6}\right)$.

6. 求曲线 $y=\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=1$ 为曲线的铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to2}\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=\infty$，故 $x=2$ 为曲线的铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}=0$，故 $y=0$ 为曲线的水平渐近线.

所以曲线的渐近线为 $y=0,x=1,x=2$.

7. 利用函数的凹凸性证明 $\frac{x^n+y^n}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$.

证明 令 $f(x)=x^n$，则 $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$，因而函数 $u=f(x)$ 的图形在 $(0,+\infty)$ 上是凹的，$\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$，即 $\frac{x^n+y^n}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.

8. 试确定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中 a,b,c,d 的值，使得点 $(-2,44)$ 为驻点，$(1,-10)$ 为拐点.

解 由题设知驻点和拐点都在曲线上，从而有 $-8a+4b-2c+d=44$. (1) $a+b+c+d=-10$, (2) $y'=3ax^2+2bx+c$, $y''=6ax+2b$，由驻点和拐点条件可得 $12a-4b+c=0$, (3) $6a+2b=0$, (4) 由(1)(2)(3)得 $a=1,b=-3,c=-24,d=16$.

9. 设 $y=\frac{x^3+4}{x^2}$. (1)求函数的增减区间和极值；(2)求函数图形的凹凸区间及拐点；(3)求其渐近线.

解 (1) $y'=1-\frac{8}{x^3}$，$(-\infty,0),(2,+\infty)$ 为增区间，$(0,2)$ 为减区间.

(2)因 $y''=\frac{24}{x^4}>0$，故 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 为凹区间，无拐点.

(3)因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty$，$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=0$，

所以 $x=0$ 为垂直渐近线，$y=x$ 为斜渐近线.

10. 作函数 $y=e^{-x^2}$ 的图形.

解 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图形对称于 y 轴，且 $y>0$，所以图形在 x 轴的上方：$y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$. 驻点为 $x=0$，极大值为 1，单调增区间为 $(-\infty,0)$，单调减区间为 $(0,+\infty)$. 拐点为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}})$，$(\frac{1}{\sqrt{2}},e^{\frac{1}{2}})$，凹区间为 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$，凸区间为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$，有水平渐近线 $y=0$. 根据以上讨论，可

大致作出其图形如下，见图 5-11.

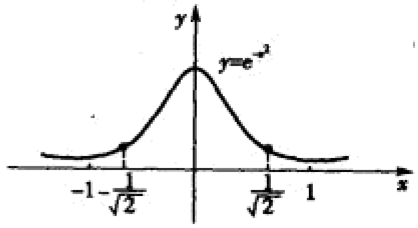


图 5-11

七、一元函数微分学在经济上的应用

1. 回答下列问题：

(1) 为什么说需求价格弹性一般为负值？

(2) 设生产 x 个单位产品时，总成本为 $C(x)$，问这时每单位产品的平均成本是多少？

(3) 用数学语言解释“某项经济指标的增长速度正在逐步加快”或“某项经济指标的增长速度正在逐步变慢”，并画图说明.

答：(1) 因为需求价格弹性 $\frac{EQ}{Ep}=\frac{p}{Q(p)}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$ 中，$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}$ 是需求量关于价格的导数，而一般情况下，需求函数 $Q=Q(p)$ 是价格 p 的单调递减函数，即一般地 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}<0$，所以说需求价格弹性一般为负值.

(2) 平均成本 $\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$.

(3) 设 u 表示某项经济指标，t 表示时间，$u=u(t)$ 二阶可导，则“经济指标的增长速度正在逐步加快”，即指 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 是递增函数，所以 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}>0$，也即 $u=u(t)$ 的图像上升且上凹，见图 5-12(a)；相反“经济指标的增长速度正在逐步变慢”，即指 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}>0$，$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}<0$，也即 $u=u(t)$ 的图像上升且下凹，见图 5-12(b).



图 5-12

2. 一般情况下，对商品的需求量 Q 是消费者收入 x 的函数，即 $Q=Q(x)$，试写出需求 Q 对收入 x 的弹性——需求收入弹性数学公式，并分析其经济意义.

答：需求收入弹性$\frac{EQ}{Ex}=\frac{x}{Q(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}$. 因为一般情形下，需求 Q 是收入 x 的增函数，故$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}>0$，从而$\frac{EQ}{Ex}>0$. 若$\frac{EQ}{Ex}=1$，则表明需求的变动幅度与收入的变动幅度是同步的，若$\frac{EQ}{Ex}>1$，则表明需求变动的百分比高于收入变动的百分比. 若$0<\frac{EQ}{Ex}<1$，则表明需求变动的百分比低于收入变动的百分比.

3. 某厂商提供的总成本和总收入函数如图 5-13，试画出下列对于产品数量 q 的函数图像.

(1) 总利润；　(2) 边际成本；　(3) 边际收入.

解　(1) 总利润 $L=R(q)-C(q)$，图像如图 5-14(a)，

(2) 边际成本 $M_c=C'(q)$，图像如图 5-14(b)，

(3) 边际收入 $M_R=R'(q)$，图像如图 5-14(c).

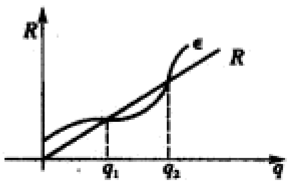
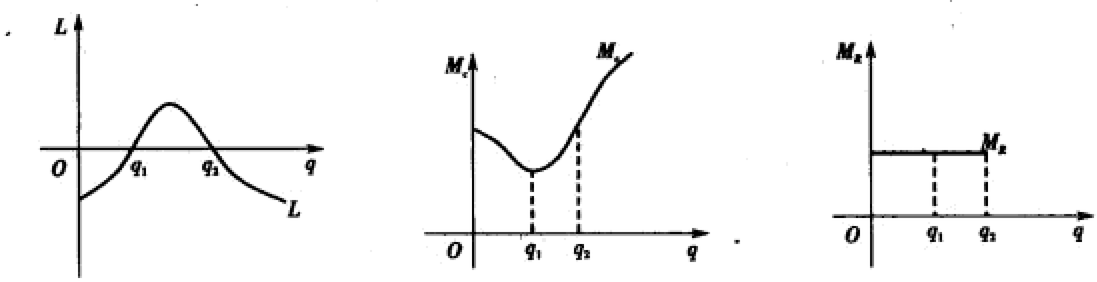


图 5-13



(a)　(b)　(c)

图 5-14

4. 求解下列各题.

(1) 设某产品的总成本函数和总收入函数分别为 $C(x)=3+2\sqrt{x}$，$R(x)=\frac{5x}{x+1}$，其中 x 为该产品的销售量，求该产品的边际成本、边际收入和边际利润.

(2) 设 p 为某产品的价格，x 为产品的需求量，且有 $p+0.1x=80$，问 p 为何值时，需求弹性大或需求弹性小.

解　(1) 边际成本 $M_C=C'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，

边际收入 $M_R=R'(x)=\frac{5}{(x+1)^2}$，

边际利润 $L'(q)=M_R-M_C=\frac{5}{(x+1)^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

(2) 由 $p+0.1x=80$，得$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=-10$，

所以需求价格弹性$\frac{Ex}{Ep}=\frac{p}{\frac{80-p}{0.1}}\times(-10)=\frac{p}{p-80}$，

故当$\frac{p}{p-80}<-1$，即$40<p<80$时，需求弹性大；当$-1<\frac{p}{p-80}<0$，即$0<p<40$时，需求弹性小.

八、泰勒公式

1. 将$p(x)=x^4-2x^3+1$展开成$x-1$的多项式.

解 $p(x)=x^4-2x^3+1,p'(x)=4x^3-6x^2,p''(x)=12x^2-12x,p'''(x)=24x-12,$
$p^{(4)}(x)=24,p^{(5)}(x)=0,x_0=1.$
$p(1)=0,p'(1)=-2,p''(1)=0,p'''(1)=12,p^{(4)}(1)=24,p^{(5)}(1)=0,$
$p^{(6)}(1)=\cdots p^{(n)}(1)=0.$

$$\begin{aligned}p(x)&=x^4-2x^3+1\\&=p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{p'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{p^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+0\\&=0-2(x-1)+0+2(x-1)^3+(x-1)^4,\end{aligned}$$

即
$$x^4-2x^3+1=-2(x-1)+2(x-1)^3+(x-1)^4.$$

2. 将$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$展开成二阶麦克劳林公式(带拉格朗日余项).

解 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}},x_0=0,f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3.$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}},f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}},$$

$$f(0)=1,f'(0)=\frac{1}{2},f''(0)=-\frac{1}{4},f'''(\theta x)=\frac{3}{8}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}},$$

则
$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}(0<\theta<1).$$

3. 将$f(x)=xe^x$展开成n阶麦克劳林公式(带拉格朗日余项).

解 $f(x)=xe^x,x_0=0,f'(x)=e^x+xe^x,f''(x)=2e^x+xe^x,f'''(x)=3e^x+xe^x,\cdots$
$f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x,f^{(n+1)}(x)=(n+1)e^x+xe^x.$
$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=2,f'''(0)=3,\cdots,f^{(n)}(0)=n,$
$f^{(n+1)}(\theta x)=(n+1)e^{\theta x}+(\theta x)e^{\theta x}=(n+1+\theta x)e^{\theta x}.$

$$xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{(n+1+\theta x)}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1}(0<\theta<1).$$

4. 已知$f(x)=\frac{1}{x+2}$在$x_0=-1$处的二阶泰勒公式为$\frac{1}{x+2}=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+R_2(x)$，求$a_0,a_1,a_2$的值.

解 $f(x)=\frac{1}{x+2},f(-1)=\frac{1}{-1+2}=1;f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2},f'(-1)=-1;f''(x)=$

$\frac{2}{(x+2)^3}$.$f''(-1)=2$. 所以$f(x)=\frac{1}{x+2}$在$x_0=-1$处的泰勒公式为

$$\frac{1}{x+2}=1-(x+1)+(x+1)^2+R_2(x).$$

5. 若$f(x)$在$[a,b]$上具有n阶导数，且$f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，证明：必存在$\zeta\in(a,b)$，使$f^{(n)}(\zeta)=0$.

证明 $f(x)$在$[a,b]$上具有n阶导数，将$f(x)$在$x_0=b$处展开成$(n-1)$阶泰勒公式 $f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(x-b)^{n-1}+$

$$\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-b)^n, \zeta \text{ 在 } x \text{ 与 } b \text{ 之间}.$$

令$x=a$，$f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(a-b)^{n-1}$
$+\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(a-b)^n$.

由于$f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(b)=0$，$a\neq b$. 所以$f^{(n)}(\zeta)=0(a<\zeta<b)$.

6. 近似计算 sin 18°，精确到10^{-4}.

解 $\sin 18°=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5+\cdots+R_{2n}(x)$.

$$|R_{2n}(x)|=\left|\frac{\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}<10^{-4}\left(x=\frac{\pi}{10}\right).$$

取$n=3$，有$\frac{1}{2^7 7!}=\frac{1}{128\times 5\ 040}<\frac{1}{128\times 5\ 000}=\frac{1}{5}\times 10^{-5}<10^{-4}$.

$\sin 18°\approx\frac{\pi}{10}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\approx 0.309\ 02$.

7. $y=f(x)$在x_0的某一邻域内有直到5阶连续导数，且$f'(x_0)=f^{(2)}(x_0)=f^{(3)}(x_0)=f^{(4)}(x_0)=0$，$f^{(5)}(x_0)\neq 0$，问$x=x_0$是否为$y=f(x)$的极值点？$(x_0,f(x_0))$是否为曲线$y=f(x)$的拐点？

解 $f^{(5)}(x)$在x_0的某一邻域内不变号，$f'(x)=\frac{1}{4!}f^{(5)}(\zeta)(x-x_0)^4$在$x_0$的某一邻域内不变号，所以$x=x_0$不是极值点.

$f''(x)=\frac{1}{3!}f^{(5)}(\zeta_1)(x-x_0)^3$，$x$由$x_0$左边移到$x_0$右边时$f''(x)$变号，因而$(x_0,f(x_0))$是拐点.

第六章　不定积分的计算

一、不定积分的概念及性质

1. 在不定积分的性质 $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ 中，为何要求 $k \neq 0$?

答：因为 $k = 0$ 时，$\int kf(x)\mathrm{d}x = \int 0\mathrm{d}x = C$(任意常数)，而不是0.

2. 思考下列问题：

(1) 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = 2^x + \sin x + C$，求 $f(x)$?

(2) 若 $f(x)$ 的一个原函数为 x^3，求 $f(x)$?

(3) 若 $f(x)$ 的一个原函数的 $\cos x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x$?

答：(1) $f(x) = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = 2^x\ln 2 + \cos x$.

(2) $f(x) = (x^3)' = 3x^2$.

(3) $f(x) = (\cos x)' = -\sin x$，$\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C = -\sin x + C$.

3. 已知曲线 $y = f(x)$ 过点(0,0)且在点 (x,y) 处的切线斜率为 $k = 3x^2 + 1$，求该曲线方程.

解　依题意，$y' = k = 3x^2 + 1$，故 $y = \int(3x^2+1)\mathrm{d}x = x^3 + x + C$，又 $y(0) = 0$，故 $C = 0$，从而曲线方程为 $y = x^3 + x$.

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3\mathrm{e}^x + x^2}{x^3}$;

(2) $\int\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

(6) $\int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(8) $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

解　(1) $\int \frac{\sqrt{x} - x^3\mathrm{e}^x + x^2}{x^3}\mathrm{d}x = \int\left(x^{-\frac{5}{2}} - \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - \mathrm{e}^x + \ln x + C$.

(2) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \ln x - 3\arcsin x + C.$

(3) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$$= -\frac{1}{x} + \arctan x + C.$$

(4) $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx = \int 3dx - 2\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx$

$$= 3x - \frac{2}{\ln\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^x + C.$$

(5) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1+\cos x}{2}dx$

$$= \frac{1}{2}(x+\sin x) + C.$$

(6) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)x^{\frac{3}{4}}dx$

$$= \int\left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right)dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C.$$

(7) $\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

(8) $\int\frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx = \int\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}dx = \int(\sec x + \tan x)^2 dx$

$$= \int(\sec^2 x + 2\sec x\tan x + \sec^2 x - 1)dx$$

$$= 2(\tan x + \sec x) - x + C.$$

(9) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx = \int\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

$$= \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int\frac{dx}{\cos^2 x} = -\cot x - \tan x + C.$$

5. 设$\int f'(\sin^2 x) = \cos^2 x + \cot^2 x$,求$f(x)$.

解 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x + \cot^2 x = \cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 - \sin^2 x + \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \sin^2 x.$$

则$f'(x) = \frac{1}{x} - x$,就有$f(x) = \int\left(\frac{1}{x}-x\right)dx = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C.$

6. 设有一曲线方程 $y=f(x)$，在其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 x^2，并知此曲线通过点(3,2)，求曲线方程.

解　由题意知 $f'(x)=x^2$，则

$f(x)=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$，

由已知 $x=3,y=2$，代入上式：$2=9+C$，得 $C=-7$.

故所求曲线方程为 $y=\frac{1}{3}x^3-7$.

7. 一物体由静止开始运动，经 t 秒后的速度是 $3t^2$(m/s)，问：(1) 在3 s后物体离开出发点的距离是多少？(2) 物体走完360 m需要多少时间？

解　设距离函数为 $s=s(t)$，则有 $s(t)=\int 3t^2\mathrm{d}t=t^3+C$，由已知 $t=0,s(t)=0$，得 $C=0$，故求出距离函数为 $s=t^3$.

(1) $s(3)=3^3=27$(m).

(2) $360=t^3,t=\sqrt[3]{360}$(s).

8. 已知 $f'(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ \sin x, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(x)$.

解　当 $x<0$ 时，$f(x)=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_1$.

当 $x>0$ 时，$f(x)=\int \sin x^2\mathrm{d}x=-\cos x+C_2$. 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，即 $C_1=-1+C_2$. 记 $C_1=C$，就有

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+C, & x\leqslant 0,\\ -\cos x+1+C, & x>0.\end{cases}$$

二、第一换元法(凑微分)

(一)凑法1

$f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)=\frac{1}{a}f(u)\mathrm{d}u.$

例如：

$$\int \sin^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\cdots=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C.$$

再如
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x-3}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)(x-1)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\cdots=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

（二）凑法 2

$x^{k-1}f(x^k)\mathrm{d}x=\frac{1}{k}f(x^k)\mathrm{d}(x^k)=\frac{1}{k}f(u)\mathrm{d}u.$

特别地，有

$$f(x^2)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u \text{ 和 } \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}.$$

例如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$

再如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2(x^2+1)}\xlongequal{u=x^2}\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+C.$$

（三）凑法 3

$f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=f(\sin x)\mathrm{d}\sin x=f(u)\mathrm{d}u;$

$f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-f(\cos x)\mathrm{d}\cos x=-f(u)\mathrm{d}u;$

$f(\tan x)\sec^2x\mathrm{d}x=f(\tan x)\mathrm{d}\tan x=f(u)\mathrm{d}u.$

例如 $\int\tan^5x\sec^3x\mathrm{d}x=\int\tan^4x\sec^2x\mathrm{d}\sec x=\int(\sec^2x-1)^2\sec^2x\mathrm{d}\sec x=\cdots$

（四）凑法 4

$f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=f(u)\mathrm{d}u..$

（五）凑法 5

$f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=f(\ln x)\mathrm{d}\ln x=f(u)\mathrm{d}u.$

（六）凑法 6

$\frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x=f(u)\mathrm{d}u;$

$\frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x=f(u)\mathrm{d}u.$

例如 $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x}\xlongequal{t=\sqrt{x}}2\int\frac{\arctan t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int\arctan t\mathrm{d}\arctan t$

$$=(\arctan t)^2+C=(\arctan\sqrt{x})^2+C.$$

（七）其他凑法举例

例如 $\int\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})+C;$

$$\int\sec x\mathrm{d}x=\int\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

再如 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \cdots$

1. 第一换元法(即凑微分法)与第二换元法的区别是什么?

答:第一换元法与第二换元法的区别在于置换的变元不同,前者将被积函数 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 中的中间变量 $\varphi(x)$ 作为新的积分变量,而后者将原积分变量 x 替换成函数 $\varphi(t)$,以 t 作为新的积分变量.

2. 应用分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$ 的关键是什么?对于积分 $\int f(x)g(x)dx$,一般应按什么样的规律设 u 和 dv?

答:应用分部积分公式的关键是恰当地选择 u 和 dv,对于积分 $\int f(x)g(x)dx$,一般应按如下的规律去设 u 和 dv:

(1) 由 dv 易求得 v;(2) $\int v du$ 应比 $\int u dv$ 容易积出.

3. 第二换元法有何规律可寻?

答:一般地,若被积函数中含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 或 $\sqrt{a^2 - x^2}$,则可利用三角函数的平方关系化原积分为三角函数的积分;若被积函数中含有 $\sqrt[n]{ax+b}$,则可令 $\sqrt[n]{ax+b} = t$,将原积分化为有理函数的积分.

4. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{1}{(2x+3)^9}dx$;　　(2) $\int e^{2x^2+\ln x}dx$;

(3) $\int \sin^2(3t+1)dt$;　　(4) $\int \tan 5x dx$;

(5) $\int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx$;　　(6) $\int \frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}dx$;

(7) $\int \frac{x}{4+x^4}dx$;　　(8) $\int \frac{x}{\sqrt{2-4x^4}}dx$;

(9) $\int \cos^3 x dx$;　　(10) $\int \frac{\sin \ln x \cos \ln x}{x}dx$;

解 (1) $\int \frac{1}{(2x+3)^9}dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{-9}d(2x+3) = -\frac{1}{16}(2x+3)^{-8} + C.$

(2) $\int e^{2x^2+\ln x}dx = \frac{1}{4}\int e^{2x^2}d(2x^2) = \frac{1}{4}e^{2x^2} + C.$

(3) $\int \sin^2(3t+1)dt = \frac{1}{2}\int [1-\cos(6t+2)]dt$

$$=\frac{t}{2}-\frac{1}{12}\int\cos(6t+2)\mathrm{d}(6t+2)$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{1}{12}\sin(6t+2)+C.$$

(4) $\int\tan 5x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin 5x}{\cos 5x}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(\cos 5x)}{\cos 5x}=-\frac{1}{5}\ln|\cos 5x|+C.$$

(5) $\int\frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right)}{1+\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+C.$

(6) $\int\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int x(x+\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\int(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2-1)$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(7) $\int\frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4+x^4}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C.$

(8) $\int\frac{x}{\sqrt{2-4x^4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{2-4x^2}}\mathrm{d}x^2$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(2x^2)^2}}\mathrm{d}(2x^2)$$

$$=\frac{1}{4}\arcsin\frac{2x^2}{\sqrt{2}}+C.$$

(9) $\int\cos^3x\mathrm{d}x=\int(1-\sin^2x)\mathrm{d}\sin x=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C.$

(10) $\int\frac{\sin\ln x\cos\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\sin\ln x\cos\ln x\mathrm{d}\ln x$

$$=\int\sin\ln x\mathrm{d}\sin\ln x$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\ln x)^2+C.$$

5. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{x}{(1-x)^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2x)}$;　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+2)}$;

(5) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$；　(6) $\int \frac{x}{x^4 - 1}dx$；

(7) $\int \frac{dx}{e^x + 2 + e^{-x}}$；　(8) $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}dx$；

(9) $\int \frac{2 - x}{\sqrt{2x - x^2}}dx$；　(10) $\int \frac{x - 1}{3 + x^2}dx$；

(11) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$；　(12) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x}$；

(13) $\int \frac{1 + \cos x}{1 + \sin^2 x}dx$；　(14) $\int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x}dx$；

(15) 设$f(x) = e^{-x^2}$，求$\int f'(x)f''(x)dx$

解　(1) $\int \frac{1 + \ln x}{x}dx = \int (1 + \ln x)d(1 + \ln x) = \frac{1}{2}(1 + \ln x)^2 + C.$

(2) $\int \frac{x}{(1 - x)^3}dx = -\int \frac{1 - (1 - x)}{(1 - x)^3}d(1 - x) = \frac{1}{2(1 - x)^2} - \frac{1}{1 - x} + C.$

(3) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int \frac{1}{1 + \ln^2 x}d(\ln x) = \arctan(\ln x) + C.$

(4) $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)} = \int \frac{x^9}{x^{10}(x^{10} + 2)}dx = \frac{1}{10}\int \frac{1}{x^{10}(x^{10} + 2)}dx^{10}$

$$\xlongequal{令 t = x^{10}} \frac{1}{10}\int \frac{1}{t(t + 2)}dt = \frac{1}{20}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{20}\ln\left(\frac{t}{t + 2}\right) + C = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{x^{10}}{x^{10} + 2}\right) + C.$$

(5) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}dx = \int \frac{1}{1 + (e^x)^2}d(e^x) = \arctan e^x + C.$

(6) $\int \frac{x}{x^4 - 1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2)^2 - 1^2}d(x^2) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) + C.$

(7) $\int \frac{dx}{e^x + 2 + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \int \frac{1}{(1 + e^x)^2}d(e^x + 1) = -\frac{1}{1 + e^x} + C.$

(8) $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}dx = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}dx = \int \frac{d\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x(1 + \operatorname{sh}^2 x)} = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x}\right)d\operatorname{sh} x$

$$= \ln|\operatorname{sh} x| - \frac{1}{2}\ln(1 + \operatorname{sh}^2 x) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{sh}^2 x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} + C.$$

(9) $\int \frac{2 - x}{\sqrt{2x - x^2}}dx = \int \frac{2 - x}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}}dx \xlongequal{x - 1 = t} \int \frac{1 - t}{\sqrt{1 - t^2}}dt$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}dt + \frac{1}{2}\int (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}d(1 - t^2)$$

$$= \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + C$$

$$= \arcsin(x-1) + \sqrt{2x-x^2} + C.$$

(10) $\int \frac{x-1}{3+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+x^2}d(3+x^2) - \int \frac{1}{3+x^2}dx$

$$= \frac{1}{2}\ln(3+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

(11) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int (\arcsin x)^{-2}d(\arcsin x) = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

(12) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x dx}{4\tan^2 x + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(2\tan x)^2}d(2\tan x)$

$$= \frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + C.$$

(13) $\int \frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{1+\sin^2 x}dx + \int \frac{1}{1+\sin^2 x}d\sin x$

$$= \int \frac{\csc^2 x}{1+\csc^2 x}dx + \arctan(\sin x)$$

$$= -\int \frac{1}{2+\cot^2 x}d(\cot x) + \arctan(\sin x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cot x}{\sqrt{2}}\right) + \arctan(\sin x) + C.$$

(14) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}dx = \int \frac{d(x+\sin x)}{x+\sin x} = \ln|x+\sin x| + C.$

(15) $\int f'(x)f''(x)dx = \int f'(x)d(f'(x)) = \frac{1}{2}(f'(x))^2 + C.$

又 $f(x) = e^{-x^2}$，所以 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$，故原式 $= 2x^2e^{-2x^2} + C.$

三、第二类换元积分法

常用代换有所谓无理代换，三角代换，双曲代换，倒代换，万能代换，欧拉(Euler)代换等.

(一)三角代换

正弦代换：　正弦代换简称为“弦换”. 是针对形如 $\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 的根式施行的，目的是去掉根号. 方法是：令 $x=a\sin t(a>0)$，则

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, dx=a\cos t dt, t=\arcsin\frac{x}{a}.$$

如 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \xlongequal{x=\sin^2 t} 2\int \frac{\sin t\cos t}{\sin t\cos t}dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$

$$\int \sqrt{2+2x-x^2}dx = \int \sqrt{3-(x-1)^2}dx \xlongequal{t=x-1} \int \sqrt{3-t^2}dt \xlongequal{t=\sqrt{3}\sin u}$$

$$=3\int\cos^2u\mathrm{d}u=\frac{3}{2}u+\frac{3}{4}\sin 2u+C=\cdots$$

$$=\frac{3}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{x-1}{2}\sqrt{2+2x-x^2}+C.$$

正切代换：正切代换简称为“切换”．是针对形如$\sqrt{a^2+x^2}\ (a>0)$的根式施行的，目的是去掉根号．方法是：利用三角公式$\sec^2t-\tan^2t=1$，即$1+\tan^2t=\sec^2t$，令$x=a\tan t$，$\mathrm{d}x=a\sec^2t\mathrm{d}t$．此时有$\sqrt{a^2+x^2}=a\sec t$，$t=\arctan\frac{x}{a}$．变量还原时，常用所谓辅助三角形法．

如$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x^2}}$．可令$x=\sqrt{2}\tan t$，有$\mathrm{d}x=\sqrt{2}\sec^2t\mathrm{d}t$．

$$I=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C'=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{2}}\right|+C'$$

$$=\ln\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)+C,\ C=C'-\ln\sqrt{2}.$$

正割代换：正割代换简称为“割换”．是针对形如$\sqrt{x^2-a^2}\ (a>0)$的根式施行的，目的是去掉根号．方法是：利用三角公式$\sec^2t-1=\tan^2t$，令$x=a\sec t$，有$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t$，$\mathrm{d}x=a\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$．变量还原时，常用辅助三角形法．

如$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$，可用下法计算：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}\xlongequal{x=a\sec t}\int\frac{a\sec t\tan t\mathrm{d}t}{a\tan t}=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C'=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C,\ C=C'-\ln|a|.$$

再如$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$，用割换计算：

$$I\xlongequal{x=\sec t}\int\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec^2t\cdot\tan t}\mathrm{d}t=\int\cos t\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-1}+C.$$

（二）无理代换

若被积函数是$\sqrt[n_1]{x},\sqrt[n_2]{x},\cdots,\sqrt[n_k]{x}$的有理式时，设$n$为$n_i(1\leqslant i\leqslant k)$的最小公倍数，作代换$t=\sqrt[n]{x}$，有$x=t^n$，$\mathrm{d}x=nt^{n-1}\mathrm{d}t$．可化被积函数为$t$的有理函数．

$$\text{如}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}\xlongequal{t=\sqrt[6]{x}}6\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{1-t}$$

$$=-6\int(1+t)\mathrm{d}t+6\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-6\left(t+\frac{1}{2}t^2+\ln|1-t|\right)$$

$$= -6\left(\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|1-\sqrt[6]{x}\right|\right)+C.$$

若被积函数中只有一种根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}$，可试作代换 $t=\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}$，从中解出 x 来.

如 $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx^2\xlongequal{t=\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}\int(t^2+1)t\cdot 2t\,dt=\int(t^4+t^2)\,dt$

$$=\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{5}(x^2-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

本题还可用割换计算，但较繁.

(三)双曲代换

利用双曲函数恒等式 $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$，令 $x=a\,\mathrm{sh}\,t$，可去掉形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 的根式. $dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$. 化简时常用到双曲函数的一些恒等式，如

$$\mathrm{ch}^2t=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2t+1),\ \mathrm{sh}^2t=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\,2t-1),$$

$$\mathrm{sh}\,2t=2\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t.\ \mathrm{arsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

例如 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx\xlongequal{x=a\,\mathrm{sh}\,t}\int a\,\mathrm{ch}\,t\cdot a\,\mathrm{ch}\,t\,dt$

$$=a^2\int\mathrm{ch}^2t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(\mathrm{ch}\,2t+1)\,dt=\frac{a^2}{4}\mathrm{sh}\,2t+\frac{a^2}{2}t+C'$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

本题可用切换计算，归结为积分 $\int\sec^3t\,dt$，该积分计算较繁.

再如 $\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}$，现用双曲代换计算.

$$I\xlongequal{x=\sqrt{2}\mathrm{sh}\,t}\int\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,t}dt=\int dt=t+C'=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{x^2}{2}+1}\right)+C'$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+2})+C\ (C=C'-\ln\sqrt{2}).$$

(四)倒代换

当分母次数高于分子次数，且分子分母均为“因式”时，可试用倒代换

$$x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt.$$

如 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^2\sqrt{x^4+x^2}}\xlongequal{u=x^2}\frac{1}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+u}}$

$$\xlongequal{u=\frac{1}{t}>0}\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t}}=-(1+t)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$$

(五)万能代换

万能代换常用于三角函数有理式的积分，令 $t=\tan\frac{x}{2}$，就有

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\tan x=\frac{2t}{1-t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2},x=2\arctan t.$$

例如 $\int\frac{dx}{1+\cos x}$，用万能代换就有

$$I\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int dt=t+C=\tan\frac{x}{2}+C.$$

1. 计算下列不定积分.

(1) $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx$；　(2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；

(3) $\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$；　(4) $\int\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln^2x}}$；

(5) $\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$；　(6) $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$；

(7) $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}dx$；　(8) $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

解　(1) $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx\xlongequal{x=\sin t}\int\sin^2t\cos^2tdt=\frac{1}{4}\int\sin^22tdt$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C$$

$$=\frac{1}{8}\arcsin x-\frac{1}{8}(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}+C.$$

(2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{\sec^2tdt}{\tan t\sec t}=\int\csc tdt=\ln|\csc t-\cot t|+C$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+C.$$

(3) $\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{\tan^3t\cdot\sec^2t}{\sec^3t}dt=\int\frac{\sin^3t}{\cos^2t}dt=-\int\frac{1-\cos^2t}{\cos^2t}d(\cos t)$

$$=\frac{1}{\cos t}+\cos t+C=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

(4) $\int\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln^2x}}=\int\frac{d\ln x}{\ln x\sqrt{1+\ln^2x}}=\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln^2x}}{\ln x}-\frac{1}{\ln x}\right|+C.$$

(5) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\xlongequal{e^x=\tan^2t}\int\frac{2\tan t\cdot\sec^2t}{\sec t\cdot\tan^2t}dt$

$$=2\int\csc t\,dt=2\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$$=2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x+C.$$

(6) $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx=\int\frac{3x+2}{\sqrt{(x+1)^2+2}}dx\xlongequal{x+1=t}\int\frac{3t-1}{\sqrt{t^2+2}}dt$

$=\frac{3}{2}\int(t^2+2)^{-\frac{1}{2}}d(t^2+2)-\int\frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt$

$=3(t^2+2)^{\frac{1}{2}}-\ln(t+\sqrt{t^2+2})+C$

$=3\sqrt{x^2+2x+3}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})+C.$

(7) $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\frac{1}{2}\int(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+2)+2\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$

$$=(x^2+2)^{\frac{1}{2}}+2\ln(x+\sqrt{x^2+2})+C.$$

(8) $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x=\sin t}\int\sin^5t\,dt=-\int\sin^4t\,d(\cos t)$

$$=-\int(1-\cos^2t)^2d(\cos t)$$

$$=-\int(1-2\cos^2t+\cos^4t)d(\cos t)$$

$$=-\cos t+\frac{2}{3}\cos^3t-\frac{1}{5}\cos^5t+C$$

$$=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}+C.$$

2. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$;　　(2) $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$;

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.

解 (1)令 $x=\sin t$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t}{\sin^2 t\cos t}dt=\int \frac{1}{\sin^2 t}=-\cot t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

(2)令 $x=\tan t$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{1}{\tan^2 t\sec t}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int \frac{d\sin t}{\sin^2 t}=-\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

(3)令 $x=\sec t$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int \frac{\sec t\cdot\tan t dt}{\sec^2 t\cdot\tan t}=\int \cos t dt=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

四、分部积分法

(一)幂函数与其他型函数乘积的积分

分部积分追求的目标之一是对被积函数两因子之一争取求导,以使该因子有较大简化,特别是能降幂或变成代数函数. 代价是另一因子用其原函数代替(一般会变繁),但总体上应使积分简化或能直接积出. 对幂函数与其他类型函数乘积的积分,使用分部积分法可使"幂"降次,或对另一类型函数求导以使其成为代数函数.

适用分部积分的常见搭配为 $\int x\ln x dx$. (幂对搭配);$\int x\cos x dx$(幂三搭配);$\int xe^x dx$(幂指搭配);$\int x^2e^x dx$. (幂指搭配);$\int e^{\sqrt{x}}dx$, $\int x\arctan x dx$(幂反搭配).

(二)建立所求积分的方程求积分

分部积分追求的另一个目标是:对被积函数两因子之一求导,进行分部积分若干次后,使原积分重新出现,且积分前的符号不为 1. 于是得到关于原积分的一个方程,从该方程中解出原积分来.

例如 $I=\int \sqrt{a^2+x^2}dx(a>0)$. 可以用分部积分法得到

$$\begin{aligned}I&=x\sqrt{a^2+x^2}-\int x\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\\&=x\sqrt{a^2+x^2}-\int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+\int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\\&=x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C_1,\end{aligned}$$

解得 $$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

再如 $\int \sec^3 x dx=\int \sec x\cdot\sec^2 x dx=\int \sec x d\tan x=\sec x\tan x-\int \tan x\sec x\tan x dx$

$$= \sec x\tan x - \int(\sec^2 x - 1)\sec x\mathrm{d}x = \sec x\tan x - \int\sec^3 x\mathrm{d}x + \int\sec x\mathrm{d}x$$

$$= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int\sec^3 x\mathrm{d}x,$$

解得 $$\int\sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

1. 计算下列积分.

(1) $\int x^2 e^{-3x}\mathrm{d}x$;

(2) $\int x^{-3}\arctan x\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{x^2}{x^2+1}\arctan x\mathrm{d}x$;

(4) $\int x\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(6) $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int\frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$;

(8) $\int\frac{\cos x}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

(10) $\int x3^x 2^{2x}\mathrm{d}x$;

(11) $\int\frac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x$;

(12) $\int x\tan^2(2x)\mathrm{d}x$;

(13) $\int x^3\cos(x^2)\mathrm{d}x$;

(14) $\int e^{-\sqrt{3x-2}}\mathrm{d}x$;

(15) $\int\frac{1+x}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$;

(16) $\int\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$;

(17) $\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;

(18) $\int(1-2x^2)e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1)
$$\int x^2e^{-3x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}e^{-3x} = -\frac{1}{3}\left(x^2e^{-3x} - 2\int xe^{-3x}\mathrm{d}x\right)$$
$$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}\int x\mathrm{d}e^{-3x}$$
$$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}\left(xe^{-3x} - \int e^{-3x}\mathrm{d}x\right)$$
$$= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{9}xe^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$$

(2)
$$\int x^{-3}\arctan x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}(x^{-2})$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^{-2}\arctan x - \int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)$$
$$= -\frac{1}{2x^2}\arctan x + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2x^2}\arctan x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

(3) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\arctan x\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\arctan x\mathrm{d}x$

$$= \int \arctan x\mathrm{d}x - \int \arctan x\mathrm{d}(\arctan x)$$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$$

(4) $\int x\sin x\cos \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\cos 2x$

$$= -\frac{1}{4}\left(x\cos 2x - \int \cos 2x\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.$$

(5) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{3}}\ln x\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \ln x\mathrm{d}x^{\frac{2}{3}}$

$$= \frac{3}{2}\left(x^{\frac{2}{3}}\ln x - \int x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \frac{9}{4}x^{\frac{2}{3}} + C.$$

(6) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \ln \sin x\mathrm{d}(\cot x) = -\left(\cot x\ln \sin x - \int \cot x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\mathrm{d}x\right)$

$$= -\cot x\ln \sin x + \int(\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x\ln \sin x - \cot x - x + C.$$

(7) $\int \frac{\ln \ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln \ln x\mathrm{d}\ln x = \ln x\cdot\ln \ln x - \int \ln x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$= \ln x(\ln \ln x - 1) + C.$$

(8) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{4\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \csc^2 x\sec x\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \sec x\mathrm{d}\cot x$

$$= -\frac{1}{4}\sec x\cot x + \frac{1}{4}\int \cot x\sec x\tan x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\csc x + \frac{1}{4}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

(9) $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \arctan x\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \int \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{1+x^2}\arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

(10) $\int x3^x2^{2x}\mathrm{d}x = \int x12^x\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 12}\int x\mathrm{d}(12^x)$

$= \frac{1}{\ln 12}(x12^x - \int 12^x\mathrm{d}x) = \frac{x12^x}{\ln 12} - \frac{12^x}{(\ln 12)^2} + C.$

(11) $\int \frac{\sin x}{e^x}\mathrm{d}x = \int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = -\int e^{-x}\mathrm{d}\cos x = -(e^{-x}\cos x + \int \cos xe^{-x}\mathrm{d}x).$

$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\mathrm{d}\sin x = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int \sin xe^{-x}\mathrm{d}x.$

移项可得 $\int \frac{\sin x}{e^{-x}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C.$

(12) $\int x\tan^2(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x(\sec^2 2x - 1)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}(\tan 2x) - \int x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}(x\tan 2x - \int \tan 2x\mathrm{d}x) - \frac{1}{2}x^2$

$= \frac{1}{2}x\tan 2x + \frac{1}{4}\ln(\cos 2x) - \frac{1}{2}x^2 + C.$

(13) $\int x^3\cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x^2\cos(x^2)\mathrm{d}x^2 \xlongequal{x^2=t} \frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\sin t$

$= \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}\cos t + C = \frac{1}{2}x^2\sin(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2) + C$

(14) $\int e^{-\sqrt{3x-2}}\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{3x-2}=t} \frac{2}{3}\int te^{-t}\mathrm{d}t$

$= -\frac{2}{3}\int t\mathrm{d}e^{-t} = -\frac{2}{3}(te^{-t} - \int e^{-t}\mathrm{d}t)$

$= -\frac{2}{3}e^{-\sqrt{3x-2}}(\sqrt{3x-2}+1) + C.$

(15) $\int \frac{1+x}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = -\int \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} - \int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right),$

$\int \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \xlongequal{\frac{1}{x}=t} \int t\mathrm{d}e^t = te^t - e^t - C = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} - C,$

所以原式 $= -\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + C.$

(16) $\int \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x = \int \ln(1+x)\mathrm{d}\left(\frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{2-x}\ln(1+x) - \int \frac{1}{2-x}\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2-x}\ln(1+x) - \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2-x}\ln(1+x) + \frac{1}{3}\ln|2-x| - \frac{1}{3}\ln(1+x) + C.$

$$(17)\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2 e^x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sec^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}\right)e^x dx = \int e^x d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}d(e^x)$$

$$= e^x\tan\frac{x}{2} - \int\tan\frac{x}{2}d(e^x) + \int\tan\frac{x}{2}d(e^x)$$

$$= e^x\tan\frac{x}{2} + C.$$

$$(18)\int(1-2x^2)e^{-x^2}dx = \int e^{-x^2}dx - \int xe^{-x^2}d(x^2) = \int e^{-x^2}dx + \int xd(e^{-x^2})$$

$$= \int e^{-x^2}dx + xe^{-x^2} - \int e^{-x^2}dx = xe^{-x^2} + C.$$

2. 设$f(x)$的一个原函数为$\frac{\cos x}{x}$,求$\int xf'(x)dx$.

解　$\int xf'(x)dx = \int xdf(x) = xf(x) - \int f(x)dx.$

又$f(x) = \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$,$\int f(x)dx = \frac{\cos x}{x} + C$,

所以原式 $= -\sin x - \frac{2\cos x}{x} + C.$

五、有理函数的积分

1. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{x^3}{x+3}dx$;　　(2) $\int\frac{3}{x^3+1}dx$;

(3) $\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$;　　(4) $\int\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}dx$;

(5) $\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx$;　　(6) $\int\frac{5x-1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

解　(1) $\int\frac{x^3}{x+3}dx = \int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+9x-27\ln|x+3|+C.$

(2) $\int\frac{3}{x^3+1}dx = \int\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}dx.$

设$\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}$,

即$A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+D) = 3$,

$(A+B)x^2+(B+D-A)x+A+D = 3.$

比较系数得方程组：$\begin{cases}A+B=0,\\B+D-A=0,\\A+D=3,\end{cases}$

解得 $A=1,B=-1,D=2.$

$$\int\frac{3}{x^3+1}dx=\int\frac{1}{1+x}dx+\int\frac{-x+2}{x^2-x+1}dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{3}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$$=\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

(3) 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{D}{x+3}.$

即 $A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+D(x+1)(x+2)=x.$

令 $x=-1$，则 $A\times1\times2=-1,A=-\frac{1}{2}$；

令 $x=-2$，则 $B\times(-1)\times1=-2,B=2$；

令 $x=-3$，则 $D\times(-2)\times(-1)=-3,D=-\frac{3}{2}.$

$$\int\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+2\int\frac{1}{x+2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.$$

(4) 设 $\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}.$

即 $A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+D(x-1)=x^2+1.$

令 $x=1$，则 $4A=1+1,A=\frac{1}{2}$；

令 $x=-1$，则 $-2D=2,D=-1$；

令 $x=0$，则 $A-B-D=1,B=\frac{1}{2}.$

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

(5) 设 $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+1}.$

即 $A(x^2+1)+(Bx+D)x=1,(B+A)x^2+Dx+A=1$.

令 $x=0$,则 $A=1$,比较系数得,$B+A=0,D=0$,则 $B=-1$.

$$\int\frac{1}{x(x^2+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

(6) 设 $\frac{5x-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{5x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+D}{1+x^2}$.

即 $A(1+x^2)+(Bx+D)(x-1)=5x-1$,

$(A+B)x^2+(D-B)x+A-D=5x-1$.

比较系数得 $\begin{cases}A+B=0,\\D-B=5,\\A-D=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=2,\\B=-2,\\D=3.\end{cases}$

$$\int\frac{5x-1}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{-2x+3}{x^2+1}dx$$
$$=\ln\frac{(x-1)^2}{1+x^2}+3\arctan x+C.$$

2. 利用已学过的方法求下列积分.

(1) $\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$;　　(2) $\int\frac{x}{x^8-1}dx$.

解　(1) $\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int\frac{x^4-x^2+1+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx=\int\frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+(x^3)^2}d(x^3)$

$$=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C.$$

(2) $\int\frac{x}{x^8-1}dx=\frac{1}{4}\int\frac{-(x^4-1)+(x^4+1)}{(x^4-1)(x^4+1)}d(x^2)$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x^2)^2-1}d(x^2)-\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x^2)^2+1}d(x^2)$$
$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan(x^2)+C.$$

六、三角函数有理式及简单无理函数的积分

1. 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{3+\cos x}dx$;　　(2) $\int\frac{1+\tan x}{\sin 2x}dx$;

(3) $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$;　　(4) $\int\frac{1}{\sin x+\tan x}dx$;

(5) $\int\frac{dx}{\sin 2x\cos x}$;　　(6) $\int\frac{\sin 2x}{\sin^4x+\cos^4x}dx$.

解　(1) 令 $\tan\frac{x}{2}=t$,则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\int \frac{1}{3+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int \frac{2}{3(1+t^2)+(1-t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{1}{t^2+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x} = \int \frac{1+\tan x}{2\tan x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\tan x}+1\right)\mathrm{d}(\tan x)$

$$= \frac{1}{2}(\ln|\tan x| + \tan x) + C.$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$

$$= \ln|t+1| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int\frac{2(1-t^2)}{4t}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}t^2 + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + C.$$

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x\cos x} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{1}{2\cos x} + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + C.$$

(6) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int\frac{2\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x = \int\frac{2\tan x}{1+\tan^4 x}\mathrm{d}(\tan x)$

$$= \int\frac{\mathrm{d}(\tan^2 x)}{1+\tan^4 x} = \arctan(\tan^2 x) + C.$$

2. 求下列无理函数积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$;　　(4) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt[4]{x}=u$，则 $\mathrm{d}x=4u^3\mathrm{d}u$，

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{4u^3}{u^2+u}\mathrm{d}u=4\int\frac{u^2}{u+1}\mathrm{d}u=u\int\frac{u^2-1+1}{u+1}\mathrm{d}u$$

$$=4\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=2u^2-4u+4\ln|u+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$

(2) 令 $\sqrt[3]{x+1}=u$，则 $x=u^3-1$，$\mathrm{d}x=3u^2\mathrm{d}u$，

$$\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{3u^2}{1+u}\mathrm{d}u=3\int\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$=3\left(\frac{u^2}{2}-u+\ln|u+1|\right)+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\ln|1+\sqrt[3]{x+1}|+C.$$

(3) 令 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=u$，则 $x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=-\frac{4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$，

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\left(-\frac{4u}{(1+u^2)^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{4u^2}{(u^2-1)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$=2\int\left(\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+2\arctan u+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

(4) 令 $\frac{x-1}{x+1}=u$，则 $\mathrm{d}u=\frac{2}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$，

$$\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{4}{3}}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{3}{2}u^{-\frac{1}{3}}+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

第七章　定积分的计算

一、定积分的概念

1. 如何表述定积分的几何意义？根据定积分的几何意义推出下列积分的值：

(1) $\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{0}^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$.

解　若 $x \in [a,b]$ 时，$f(x) \geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$ 及 x 轴所围成平面图形的面积. 若 $x \in [a,b]$ 时，$f(x) \leqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$ 及 x 轴所围平面图形面积的负值.

(1) 由图 7-1(a) 所示，$\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = (-A_1) + A_1 = 0$.

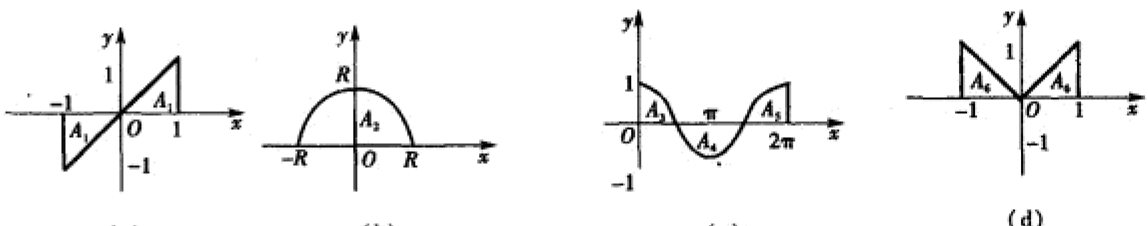


图 7-1

(2) 由图 7-1(b) 所示，$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = A_2 = \dfrac{\pi R^2}{2}$.

(3) 由图 7-1(c) 所示，
$$\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = A_3 + (-A_4) + A_5 = A_3 + A_5 + (-A_3 - A_5) = 0.$$

(4) 由图 7-1(d) 所示，$\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 2A_6 = 2 \times \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1 = 1$.

2. 若当 $a \leqslant x \leqslant b$，有 $f(x) \leqslant g(x)$，下面两个式子是否均成立，为什么？

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int g(x)\mathrm{d}x$.

答：由定积分的比较性质知(1) 式成立，而不定积分的结果表示一族函数，$\int f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 不能比较大小，故(2) 式不成立.

3. n 个数的算术平均值与连续函数在闭区间上的平均值有何区别与联系？

答：二者均反映了多个数的平均值大小，后者是前者的推广，但 n 个数的算术平均值是有限个数的平均值，而连续函数在闭区间上的平均值反映的是无限个数的平

均值，前者计算公式是$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$，后者计算公式是$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

4. 用定积分定义计算定积分$\int_a^b c\mathrm{d}x$，其中c为一定常数.

解　任取分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，把$[a,b]$分成$n$个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots n)$，小区间长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots n)$，在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i$作乘积$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$的和式：

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}c\cdot(x_i-x_{i-1})=c(b-a),$$

记$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，则$\int_a^b c\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}c(b-a)=c(b-a)$.

5. 利用定积分的估值公式，估计定积分$\int_{-1}^{1}(4x^4-2x^3+5)\mathrm{d}x$的值.

解　先求$f(x)=4x^4-2x^3+5$在$[-1,1]$上的最值，由

$$f'(x)=16x^3-6x^2=0，得 x=0 或 x=\frac{3}{8}.$$

比较$f(-1)=11,f(0)=5,f\left(\frac{3}{8}\right)=5-\frac{27}{1\,024}=\frac{5\,093}{1\,024},f(1)=7$的大小，知

$$f_{\min}=\frac{5\,093}{1\,024},f_{\max}=11,$$

由定积分的估值公式，得

$$f_{\min}\cdot[1-(-1)]\leqslant\int_{-1}^{1}(4x^4-2x^3+5)\mathrm{d}x\leqslant f_{\max}\cdot[1-(-1)],$$

即　$$\frac{5\,093}{512}\leqslant\int_{-1}^{1}(4x^4-2x^3+5)\mathrm{d}x\leqslant 22.$$

6. 求函数$f(x)=\sqrt{1-x^2}$在闭区间$[-1,1]$上的平均值.

解　平均值$\mu=\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{2}=\frac{\pi}{4}$.

7. 利用定积分定义计算$\int_a^b x\mathrm{d}x(a<b)$.

解　因为$f(x)=x$在$[a,b]$上连续，故可积，所以积分与区间$[a,b]$的分法及点ξ_i的取法无关，因此不妨把$[a,b]$分成n等份，分点为$x_i=a+\frac{i(b-a)}{n},\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，取$\xi_i=x_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$，则$\int_a^b x\mathrm{d}x$对应的积分和

$$\begin{aligned}s_n&=\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right]\\&=(b-a)\left[a+\frac{(b-a)}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]=(b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\int_a^b x\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(b-a)\left(a+\frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= (b-a)\left(a+\frac{b-a}{2}\right) = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

8. 估计 $\int_1^4 (1+x^2)\mathrm{d}x$ 的值.

解 在区间[1,4]上,函数 $f(x) = 1+x^2$ 是增函数,即最大值 $M = f(4) = 17$,最小值 $m = f(1) = 2$,

$$2(4-1) \leqslant \int_1^4 (1+x^2)\mathrm{d}x \leqslant 17(4-1),$$

即
$$6 \leqslant \int_1^4 (1+x^2)\mathrm{d}x \leqslant 51.$$

9. 设 $f(x)$ 在[0,1]上连续,在(0,1)内可导,且 $f(0) = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$,证明在(0,1)内至少存在一点 ξ,使 $f'(\xi) = 0$.

证明 因为 $f(x)$ 在 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上连续,由积分中值定理,存在 $c \in \left[\frac{2}{3},1\right]$ 使得 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x = 3f(c)\frac{1}{3} = f(c)$,又 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足罗尔定理条件,故在 $(0,c) \subset (0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi) = 0$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:(1) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \geqslant 0$,且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$,则在 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 0$;(2) 若在 $[a,b]$ 上,$f(x) \geqslant 0$,且 $f(x)$ 不恒等于零,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证明 (1) 反证法,假设在 (a,b) 内有一点 x_0,使得 $f(x_0) > 0$,由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知,必有 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 使 $f(x) > 0$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x > \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x > 0,$$

与已知 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾;对 $x_0 = a$ 和 $x_0 = b$ 同理可证,故在 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

(2) 因为 $f(x) \geqslant 0$,所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. 假设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$,则由(1)结论可得在 $[a,b]$ 上,$f(x) \equiv 0$,与 $f(x)$ 不恒等于零矛盾,故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

11. 设 $f(x)[a,b]$ 上连续,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号($g(x) \geqslant 0$ 或 $g(x) \leqslant 0$),证明 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,(a \leqslant \xi \leqslant b)$.

证明 不妨设在 $[a,b]$ 上 $g(x) \geqslant 0$,因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,必有最大值 M,最小值 m,所以 $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$

两边积分　$\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x.$

即　$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$

当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$时，有$m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M,$

记$\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = \mu$，则有$m \leqslant \mu \leqslant M.$

因为$f(x)$在$[a,b]$上连续，故必有$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi) = \mu$，即

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = f(\xi),$$

所以　$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$时，有$g(x) = 0, x \in [a,b]$，于是$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$，在$[a,b]$上任取一点$\xi$，都有$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

综上可得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,(a \leqslant \xi \leqslant b).$

同理可证$g(x) \leqslant 0$的情形.

12. 利用定积分定义求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sqrt{n} + \sqrt{2n} + \cdots + \sqrt{n^2})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2 + 4k^2}.$

解　(1) 原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)\dfrac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\,\frac{1}{n} = \int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

(2) 原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1 + 4\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}\dfrac{1}{n}$，考虑$f(x) = \dfrac{1}{1 + 4x^2}, x \in [0,1]$，

将$[0,1]$ n等分，则$\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$，

于是原式 $=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k=\int_0^1\frac{1}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}\arctan 2x\Big|_0^1=\frac{1}{2}\arctan 2.$

13. 设 $f(x)$ 连续可微, $f(0)=0, f'(0)=1, F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$, 试求 (1) $F'(x)$; (2) $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}$.

解 (1) 令 $x^2-t^2=u$ (x 为参数), 则 $-2tdt=du$,

$$F(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f(u)du,$$

于是 $F'(x)=2x\frac{1}{2}f(x^2)=xf(x^2).$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf'(x^2)}{8x}=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{1}{4}.$

二、微积分基本公式

1. 回答下列问题.

(1) $\frac{d}{dt}\int_1^x\sin t dt=?$　　(2) $(\int_1^2 f(x)dx)'=?$

(3) $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=?$　　(4) $\frac{d}{dx}\int_a^x\cos t^2 dx=?$

(5) $\frac{d}{dx}\int_x^1 e^{t^2}dt=?$　　(6) 若 $f(x)=\int_x^{x^2}\sin t^2 dt$, 则 $f'(x)=?$

答: (1) 因为 $\int_1^x\sin t dt$ 是以 x 为自变量的函数, 故 $\frac{d}{dt}\int_1^x\sin t dt=0.$

(2) 因为 $\int_1^2 f(x)dx$ 是常数, 故 $(\int_1^2 f(x)dx)'=0.$

(3) 因为 $\int_a^b f(x)dx$ 的结果为常数不含 x, 故 $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=0.$

(4) 由变上限定积分求导公式, 知 $\frac{d}{dx}\int_a^x\cos t^2 dx=\cos x^2.$

(5) $\frac{d}{dx}\int_x^1 e^{t^2}dt=\frac{d}{dx}(-\int_1^x e^{t^2}dt)=-e^{x^2}.$

(6) $f'(x)=(x^2)'\sin(x^2)^2-\sin x^2=2x\sin x^4-\sin x^2.$

2. 当 $f(x)$ 为积分区间 $[a,b]$ 上的分段函数时, 问如何计算定积分 $\int_a^b f(x)dx$? 试举例说明.

答: 分段函数的定积分应采用定积分关于积分区间的分割性质, 将 $\int_a^b f(x)dx$ 分解为部分区间上的定积分来计算. 例如: 若 $f(x)=\begin{cases}x^2, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, -1\leqslant x<0,\end{cases}$ 则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\bigg|_{0}^{1} = -\frac{1}{6}.$$

3. 对于定积分,凑微分法还能用吗?为什么?

答:能用. 因为定积分是通过被积函数的原函数来计算,而凑微分法所得原函数不需作变量置换.

4. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x$;　(2) $\int_{-2}^{1} x^2|x|\mathrm{d}x$;　(3) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{(1-x)^2}{2}\bigg|_0^1 + \frac{(x-1)^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

(2) $\int_{-2}^{1} x^2|x|\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0}(-x^3)\mathrm{d}x + \int_0^1 x^3\mathrm{d}x$

$$= -\frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}.$$

(3) $\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x$

$$= (-\cos x)\bigg|_0^{\pi} + \cos x\bigg|_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4.$$

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x \sin \pi t\mathrm{d}t}{1+\cos \pi x}$.

解　此极限是"$\dfrac{0}{0}$"型未定型,由洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x \sin \pi t\mathrm{d}t}{1+\cos \pi x} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\int_1^x \sin \pi t\mathrm{d}t\right)'}{(1+\cos \pi x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{-\pi\sin \pi x} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{-\pi}\right) = -\frac{1}{\pi}.$$

6. 计算下列各题:

(1) $\int_0^1 x^{100}\mathrm{d}x$;　(2) $\int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$;　(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^1 100^x\mathrm{d}x$;　(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$;　(6) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x+\pi)\mathrm{d}x$;　(8) $\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$;　(9) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{2x}\mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{100+x^2}$;　(11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;　(12) $\int_0^1 \mathrm{sh}\, x\mathrm{d}x$;

(13) $\int_0^1 \mathrm{ch}\, x\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^1 x^{100}\mathrm{d}x = \frac{x^{101}}{101}\Big|_0^1 = \frac{1}{101}$.

(2) $\int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}$.

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^1 = \mathrm{e} - 1$.

(4) $\int_0^1 100^x\mathrm{d}x = \frac{100^x}{\ln 100}\Big|_0^1 = \frac{99}{\ln 100}$.

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

(6) $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}-1}{2}$.

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x+\pi)\mathrm{d}(2x+\pi) = -\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$.

(8) $\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$

$$= 4\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

(9) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{4}\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{4}$.

(10) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{100+x^2} = \frac{1}{100}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{10}\right)^2} = \frac{1}{10}\arctan\frac{x}{10}\Big|_0^1 = \frac{1}{10}\arctan\frac{1}{10}$.

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}(\tan x) = \frac{(\tan x)^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$.

(12) $\int_0^1 \mathrm{sh}\, x\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2} - 1 = \mathrm{ch}\,1 - 1$.

(13) $\int_0^1 \mathrm{ch}\, x\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2} = \mathrm{sh}\,1$.

7. 求由参数表达式 $x = \int_0^t \sin u$, $y = \int_0^t \cos u\mathrm{d}u$ 所给定的函数 y 对 x 的导数.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\mathrm{d}\left(\int_0^t \cos u\mathrm{d}u\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}\left(\int_0^t \sin u\mathrm{d}u\right)}{\mathrm{d}t}} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t.$$

8. 求由 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \int_0^x \cos t\mathrm{d}t = 0$ 所给定的隐函数 y 对 x 的导数.

解 将方程两边对 x 求导(y 看作 x 的函数)

$$\frac{\mathrm{d}\left(\int_0^y e^t \mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\left(\int_0^x \cos t\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}x}=0, e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos x=0.$$

因$\int_0^y e^t \mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$，即$e^y-1+\sin x=0$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\cos x}{e^y}=-\frac{\cos x}{1-\sin x}$.

9. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^6}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

解　(1) 该极限是“$\frac{0}{0}$”型，应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^4)\cdot 2x}{6x^5}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^4)}{x^4}=\frac{1}{3}.$$

(2) 该极限是“$\frac{\infty}{\infty}$”型，应用洛必达法则有

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\left(\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t\right)e^{t^2}}{e^{2t^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{e^{t^2}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0.$$

10. 求下列导数：

(1) 设$f(x)$为连续函数，求$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}(x-t)f(t)\mathrm{d}t$；

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

解　(1) 原式$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x^2}tf(t)\mathrm{d}t\right]$

$$=2x\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x^2)2x-x^2f(x^2)2x=2x\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t-\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t\right]$

$$=\cos[\pi(\cos x)^2](-\sin x)-\cos[\pi(\sin x)^2]\cos x$$

$$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

11. 求函数$I(x)=\int_0^x te^{-t^2}\mathrm{d}t$的极值.

解　$I'(x)=xe^{-x^2}$，令$I'(x)=0$，得驻点$x=0$，且$I''(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)$，$I''(0)=1>0$，故当$x=0$时，I取最小值$I(0)=0$.

12. 计算下列定积分：

(1) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \mathrm{d}\theta$；

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\mathrm{d}x$； (4) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1, \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int_4^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_4^9 x\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_4^9 = 51\frac{1}{6}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)\mathrm{d}\theta = (\tan\theta - \theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(4) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

13. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, \quad x < 0 \text{ 或 } x > \pi, \end{cases}$

求 $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的表达式.

解 当 $x < 0$ 时，$f(x) = 0, \varphi(x) = \int_0^x 0\mathrm{d}t = 0$.

当 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 时，$f(x) = \frac{1}{2}\sin x$，

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

当 $x > \pi$ 时，$f(x) = 0, \varphi(x) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin t\mathrm{d}t + \int_{\pi}^x 0\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = 1$.

则 $\varphi(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$

14. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0$.

证明 因为 $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx$，又 $\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)}dt$，证明

(1) $F'(x) \geqslant 2$； (2) 方程 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内有且只有一个根.

证明 (1) $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{f^2(x)+1}{f(x)} \geqslant \frac{2f(x)}{f(x)} = 2$；

(2) $F(a) = \int_a^a f(t)dt + \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt = \int_b^a \frac{1}{f(t)}dt < 0$，

$F(b) = \int_a^b f(t)dt + \int_b^b \frac{1}{f(t)}dt = \int_a^b f(t)dt > 0$.

由连续函数介值定理可知，在 (a,b) 内必有 ξ 使得 $F(\xi)=0$，又因为 $F'(x)>0$ 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，从而 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内必有且仅有一根.

三、定积分的积分方法

(一) 定积分换元法

1. 下面的计算是否正确，请对所给积分写出正确结果.

(1)
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} \sin x dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} d(\cos x) = \frac{-2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

(2)
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-(\sin t)^2}\,d(\sin t) = \int_{-1}^{1} \cos t \cdot \cos t dt = \int_{-1}^{1} (\cos t)^2 dt = 2\int_0^1 (\cos t)^2 dt = 2\int_0^1 \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{2}\sin 2.$$

答：(1) 不正确，应该为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} \sin x dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} d(\cos x) = -\frac{4}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

此题前面已经做过，这里介绍了又一解法.

(2) 不正确，应该为

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(\sin t)^2}\mathrm{d}(\sin t)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

2. 定积分与不定积分的换元法有何区别与联系？

答：定积分与不定积分的换元法的区别在于：不定积分换元积分后要作变量回代，定积分在换元时要同时变换积分限，而不用作变量回代. 联系在于：二者均要求置换的变元 $x=\varphi(t)$ 单调可导，且选择变元 $x=\varphi(t)$ 的规律相同.

3. 利用定积分的几何意义，解释奇偶函数在对称区间上的积分所具有的规律.

答：如图，设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上满足 $f(x)\geqslant 0$，则 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=0$，$x=a$ 及 x 轴所围图形的面积，不妨记为 A，则当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2A=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$（如图 7-2(a) 所示），当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=(-A)+A=0$（如图 7-2(b) 所示）.

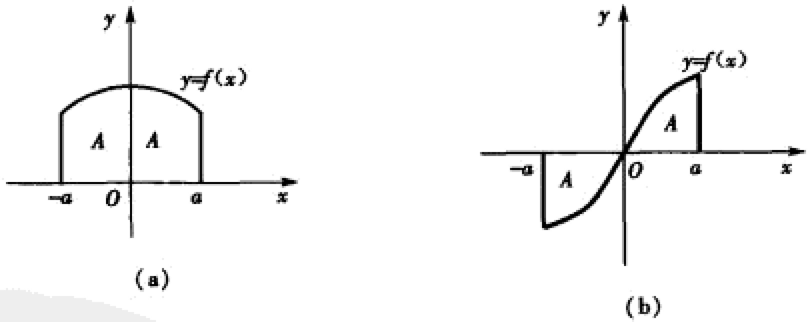


图 7-2

4. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1\frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) 令 $x=4\sin t$，则 $\sqrt{16-x^2}=4\cos t$，$\mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t$，

当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=4$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_0^4\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos t\cdot 4\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}8(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=(8t+4\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi.$$

(2) $\int_0^1 \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

5. 计算下列定积分.

(1) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$;

(2) $\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx$;

(3) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$;

(4) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy$;

(5) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(6) $\int_{-1}^1\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$;

(7) $\int_{\frac{3}{4}}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$;

(8) $\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx$;

(9) $\int_{e^{\sqrt[4]{3}}}^{e^{\sqrt{3}}}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln^2 x}}$,

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2x dx$;

(11) $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$;

解 (1) 令 $t=x+\frac{\pi}{3}$,则当 $x=\frac{\pi}{3}$时,$t=\frac{2\pi}{3}$,当 $x=\pi$ 时,$t=\frac{4\pi}{3}$,$dt=dx$,

故原式 $=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\sin^2 t dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(1-\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(2) 原式 $\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)dt$

$=\frac{1}{4}(t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}$.

(3) 原式 $=\int_1^e(1+\ln x)d(1+\ln x)$

$=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\Big|_1^e=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$.

(4) 令 $y=2\sin t$,则当 $y=-\sqrt{2}$时,$t=-\frac{\pi}{4}$,当 $y=\sqrt{2}$时,$t=\frac{\pi}{4}$,$dy=2\cos tdt$,

故原式 $=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8}\cos t\cdot 2\cos tdt$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(\pi+2).$$

(5) 令 $x=\tan t$，则当 $x=1$ 时，$t=\frac{\pi}{4}$，当 $x=\sqrt{3}$ 时，$t=\frac{\pi}{3}$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$，

故原式 $=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2 t\mathrm{d}t}{\tan t\sec t}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=\ln|\csc t-\cot t|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$=\ln\left|\csc\frac{\pi}{3}-\cot\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|\csc\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{4}\right|$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 3-\ln|1-\sqrt{2}|.$$

(6) 令 $\sqrt{5-4x}=t$，则 $x=-\frac{t^2-5}{4}$.

当 $x=-1$ 时，$t=3$；当 $x=1$ 时，$t=1$，$\mathrm{d}x=-\frac{t}{2}\mathrm{d}t$.

故原式 $=\int_3^1\frac{\frac{5-t^2}{4}\left(-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t}{t}=\int_3^1\frac{t^2-5}{8}\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3}-5t\right)\Big|_3^1=\frac{1}{6}.$

(7) 令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2$，$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$.

当 $x=\frac{3}{4}$ 时，$t=\frac{1}{2}$；当 $x=1$ 时，$t=0$.

故原式 $=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-2t\mathrm{d}t}{t-1}=-2\int_{\frac{1}{2}}^{0}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$

$$=-2(t+\ln|t-1|)\Big|_{\frac{1}{2}}^{0}=1-2\ln 2.$$

(8) 原式 $\xlongequal{u=\sqrt{1-e^{2x}}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}u\cdot\frac{-u}{1-u^2}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{1}{1-u^2}\right)\mathrm{d}u$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln(2+\sqrt{3}).$$

(9) 令 $u=\ln x$，

原式 $=\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}=-\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}\frac{1}{u}}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}$

$$= -\ln\left(\frac{1}{u}+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\right)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

(10) 原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[\cos 3x + \cos x]dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

$$= \frac{1}{6}\sin 3x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(11) 原式 $= \int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx \xlongequal{u=\frac{x}{2}} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin u - \cos u|\, du$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos u - \sin u)du + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin u - \cos u)du$$

$$= 2(\sin u + \cos u)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2(-\cos u - \sin u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 4(\sqrt{2}-1).$$

(二)定积分的分部积分法

1. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^4 (5x+1)e^{5x}dx$;　(2) $\int_0^1 e^{\pi x}\cos \pi x dx$;　(3) $\int_0^1 (x^3+3^x+e^{3x})x dx$.

解　(1) $\int_0^4 (5x+1)e^{5x}dx = \int_0^4 (5x+1)d\frac{e^{5x}}{5} = \frac{e^{5x}}{5}(5x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{5x}}{5}d(5x+1)$

$$= \frac{6e^5-1}{5} - \frac{e^{5x}}{5}\Big|_0^1 = e^5.$$

(2) $\int_0^1 e^{\pi x}\cos \pi x dx = \int_0^1 e^{\pi x}d\frac{\sin \pi x}{\pi} = \frac{1}{\pi}e^{\pi x}\sin \pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\pi}de^{\pi x}$

$$= 0 - \int_0^1 e^{\pi x}\sin \pi x dx = -\int_0^1 e^{\pi x}d\left(-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{\pi x}\cos \pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos \pi x}{\pi}de^{\pi x}$$

$$= -\frac{1}{\pi}(e^{\pi}+1) - \int_0^1 e^{\pi x}\cos \pi x dx.$$

移项合并得 $\int_0^1 e^{\pi x}\cos \pi dx = -\frac{1}{2\pi}(e^{\pi}+1)$.

(3) $\int_0^1 (x^3+3^x+e^{3x})x dx = \int_0^1 x d\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)$

$$= x\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{3}{\ln 3}+\frac{1}{3}e^3 - \left(\frac{x^5}{20}+\frac{3^x}{\ln^2 3}+\frac{1}{9}e^{3x}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{3\ln 3-2}{\ln^2 3}+\frac{2}{9}e^3+\frac{14}{45}.$$

2. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 xe^{-x}dx$;　　(2) $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x dx$;

(3) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$;　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$;

(5) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$;　　(6) $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$;

(7) $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}}dx$($m$ 为自然数);

解　(1)原式 $=\int_0^1 -xde^{-x}=-\left(xe^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx\right)=-\left(e^{-1}+e^{-x}\Big|_0^1\right)=1-\frac{2}{e}$.

(2)原式 $=\frac{1}{2}\int_3^{\sqrt{3}} \arctan x d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(3)原式 $=2\int_1^4 \ln x d\sqrt{x}=2\left[\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4-\int_1^4\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]$

$$=2\left[4\ln 2-2\sqrt{x}\Big|_1^4\right]=4(2\ln 2-1).$$

(4)原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}d\sin x=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx=e^{\pi}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}d\cos x$

$$=e^{\pi}+2\left(e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx\right)$$

$$=e^{\pi}+2\left(-1-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx\right),$$

移项得　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$.

(5)原式 $=x\sin(\ln x)\Big|_1^e-\int_1^e xd\sin(\ln x)=e\sin 1-\int_1^e x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$$=e\sin 1-\int_1^e\cos(\ln x)dx$$

$$=e\sin 1-x\cos(\ln x)\Big|_1^e+\int_1^e xd\cos(\ln x)$$

$$=e\sin 1-e\cos 1+1-\int_1^e x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx,$$

移项得　原式 $=\frac{1}{2}[e(\sin 1-\cos 1)+1]$.

(6)原式 $=\int_1^e \ln x\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x\mathrm{d}x$

$$=x\ln x\Big|_1^e-x\Big|_1^e-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^1+x\Big|_{\frac{1}{e}}^1=2\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

(7) 令 $x=\sin t$ 则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$, 于是

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\cos t\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}t\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot m}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m+1)}\dfrac{\pi}{2}(m\text{ 为奇数}),\\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot m}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m+1)}(m\text{ 为偶数}).\end{cases}$$

3. 设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t$, 计算积分 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

解　原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\cdot e^{-x^4}\cdot 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}\mathrm{d}(x^4)=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}(e^{-1}-1).$$

(三)利用函数的奇偶性计算定积分

1. 利用函数的奇偶性计算下列积分.

(1) $\int_{-5}^5\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x+\sqrt{1+x^4})\mathrm{d}x$.

解　(1) $\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}$ 为 $[-5,5]$ 上奇函数, 故原式 $=0$.

(2) $x\sqrt{1+x^4}$ 为奇函数,

故原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x=2(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2$.

2. 证明　$\int_{-a}^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x$, 其中 $\varphi(u)$ 为连续函数.

证明　因为 $\int_{-a}^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x=\int_{-a}^0\varphi(x^2)\mathrm{d}x+\int_0^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x$.

又 $\int_{-a}^0\varphi(x^2)\mathrm{d}x\overset{t=-x}{=\!=\!=}\int_a^0\varphi(t^2)(-\mathrm{d}t)=\int_0^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x$,

所以　$\int_{-a}^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x=2\int_0^a\varphi(x^2)\mathrm{d}x$.

3. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x},x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+e^x},x<0,\end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x-1)dx$.

解 令$x-1=t$,则$dx=dt$. 当$x=0$时,$t=-1$;当$x=2$时,$t=1$,于是

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx.$$

因 $$\int_{-1}^0\frac{1}{1+e^x}dx\xlongequal{e^x=t}\int_{e^{-1}}^1\frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{t}=\int_{e^{-1}}^1\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right]dt$$

$$=[\ln t-\ln(1+t)]\Big|_{e^{-1}}^1=\ln(1+e)-\ln 2.$$

而 $$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

故原式$=\ln(1+e)$.

4. 证明 (1) $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$;

(2) $\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$.

证明 (1) 因$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx$,

又 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx\xlongequal{u=\pi-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f[\sin(\pi-u)](-du)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin u)du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx,$$

所以 $$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx.$$

(2)因$f(|\cos x|)$是以π为周期的偶函数,所以

$$\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(|\cos x|)dx=2\int_0^{\pi}f(|\cos x|)dx$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx.$$

5. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$. 并求出积分值.

解 令$x=\frac{\pi}{2}-t$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt.$$

设 $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$，

则 $$2a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos^2 x\right) dx = \frac{\pi - 1}{2},$$

故 $$a = \frac{\pi - 1}{4}.$$

四、广义积分

1. 下列解法是否正确？为什么？

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

答：不正确. 因为 $\frac{1}{x}$ 在 $[-1,2]$ 上存在无穷间断点 $x = 0$，$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} dx$ 不能直接应用牛顿一莱布尼茨公式计算，事实上，

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{\varepsilon_2}^{2} \frac{1}{x} dx$$
$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} [\ln(-x)]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} [\ln x]_{\varepsilon_2}^{2} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \ln \varepsilon_1 + \ln 2 - \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \varepsilon_2$$

不存在，故 $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} dx$ 发散.

2. 指出下面广义积分的计算错误.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-x} dx = -\lim_{b \to \infty} e^{-x} \Big|_0^{b} = \lim_{b \to \infty} (1 - e^{-b}) = 1 - 0 = 1.$$

答：本题计算错误在于 $\lim\limits_{b \to \infty} e^{-b} = 0$，因为 $\lim\limits_{b \to +\infty} e^{-b} = 0$，而 $\lim\limits_{b \to -\infty} e^{-b} = +\infty$，故 $\lim\limits_{b \to \infty} e^{-b}$ 不存在，从而 $\int_0^{\infty} e^{x} dx$ 发散.

3. 研究广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 的敛散性.

解 因 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_0^{+\infty} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$，

所以 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 发散.

4. 计算广义积分 $\int_0^{6} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx$.

解 $$\int_0^{6} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx = \int_4^{6} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx + \int_0^{4} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx$$
$$= 3(x-4)^{\frac{1}{3}} \Big|_4^{6} + 3(x-4)^{\frac{1}{3}} \Big|_0^{4} = 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 0 + 0 - 3\sqrt[3]{-4}$$
$$= 3(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}).$$

5. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty} e^{-100x}dx$.

解 $\int_1^{+\infty} e^{-100x}dx = -\frac{e^{-100x}}{100}\Big|_1^{+\infty} = 0-\left(-\frac{e^{-100}}{100}\right)=\frac{1}{100}e^{-100}$.

6. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{100+x^2}$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{100+x^2}=\frac{1}{10}\arctan\frac{x}{10}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{20}$.

7. 判别下列各广义积分的收敛性,如果收敛,计算广义积分的值.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;　　(2) $\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t dt$;$(p>0)$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;　　(4) $\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$($n$ 为自然数);

(5) $\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$;　　(6) $\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

(7) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;　　(8) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

解 (1) 原式 $=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

(2) 原式 $=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin\omega t dt$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{p^2+\omega^2}e^{-pt}(-p\sin\omega t-\omega\cos\omega t)\Big|_0^b$$

$$=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

(3) 原式 $=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+2x+2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+2}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan(x+1)]\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\arctan(x+1)]\Big|_0^b$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{\pi}{4}-\arctan(a+1)\right]+\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan(b+1)-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

(4) 原式 $=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}dx$

$$=\lim_{b\to+\infty}(-x^n e^{-x})\Big|_0^b+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b nx^{n-1}e^{-x}dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(-nx^{n-1}e^{-x})\Big|_0^b + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b n(n-1)x^{n-2}e^{-x}dx$$

$$= \cdots = n!\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = n!.$$

(5)因 $x=1$ 为瑕点,且

$$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = +\infty,$$

即广义积分$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}$发散,所以广义积分$\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$发散.

(6) 原式 $= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_1^{e-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}[\arcsin(\ln x)]\Big|_1^{e-\varepsilon}$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}[\arcsin\ln(e-\varepsilon) - \arcsin 0] = \frac{\pi}{2}.$$

(7)原式 $= \int_0^{\frac12}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{\frac12}^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$,

因 $$\int_0^{\frac12}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\frac12}\frac{d\left(x-\frac12\right)}{\sqrt{\frac14-\left(x-\frac12\right)^2}} = \arcsin(2x-1)\Big|_0^{\frac12} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{\frac12}^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac12}^1 = \frac{\pi}{2},$$

所以原式 $=\pi$.

(8) $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac1t} \int_1^0\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac1t\sqrt{\left(\frac1t\right)^2-1}}$$

$$= \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

8. 已知$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax} = \int_{-\infty}^a te^t dt$,求常数 a.

解 $\int_{-\infty}^a te^t dt = (te^t - e^t)\Big|_{-\infty}^a = e^a(a-1)$, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac1x\right)^{ax} = e^a,由 e^a(a-1) = e^a 得 a = 2.$$

9. 当 k 为何值时,广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛?当 k 为何值时,这广义积分发散?当 k 为何值时,广义积分取得最小值?

解 当 $k\neq1$ 时,$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{1-k}(\ln x)^{1-k}\right]\Big|_2^b$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{1-k} (\ln b)^{1-k} - \frac{1}{1-k} (\ln 2)^{1-k} \right].$$

故当 $k > 1$ 时，$\lim\limits_{b \to +\infty} \frac{1}{1-k} (\ln b)^{1-k} = 0$，积分收敛于 $\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$.

当 $k < 1$ 时，则积分发散.

当 $k = 1$ 时，$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} [\ln(\ln x)] \big|_2^b = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2)$，积分发散.

归纳以上讨论，$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$，当 $k > 1$ 时收敛，当 $k \leqslant 1$ 时发散.

当 $k > 1$ 时，$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$，为确定 k 取何值时，广义积分取最小值，只需确定 k 取何值时，$(k-1)(\ln 2)^{k-1}$ 取最大值.

记 $f(k) = (k-1)(\ln 2)^{k-1}$，

$$f'(k) = (\ln 2)^{k-1} + (k-1)(\ln 2)^{k-1} \ln\ln 2 = (\ln 2)^{k-1}[1 + (k-1)\ln\ln 2].$$

令 $f'(k) = 0$，得 $k = 1 - \frac{1}{\ln\ln 2}$.

利用极值理论，易知当 $k = 1 - \frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，积分取得最小值.

第八章　定积分的应用

一、定积分的几何应用

1. 什么叫微元法？用微元法解决实际问题的思路及步骤如何？

答：微元法就是运用"无限细分"和"无限累积"两个步骤解决实际问题的一种方法，具体说来，即是对在区间$[a,b]$上分布不均匀的量F，先将其无限细分，得其微元$dF=f(x)dx$然后将微元dF在$[a,b]$上无限求和（累积），即得所求量$F=\int_a^b dF=\int_a^b f(x)dx$. 求微元时，一般是对$[a,b]$的子区间$[x,x+dx]$对应的部分量，采用以"常代变"，"均匀代替不均匀"，"直代曲"的思路.

2. 求平面图形的面积一般分为几步？

答：一般分为(1)画图，(2)选定积分变量并给出积分区间，(3)确定被积函数并写出积分表达式，(4)计算定积分求得面积四个步骤.

3. 求曲线$y=x^2$，$y=(x-2)^2$与x轴围成的平面图形的面积.

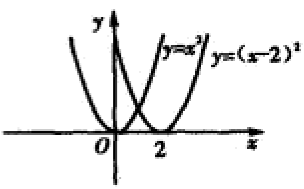


图 8-1

解　如图 8-1，由$\begin{cases}y=x^2,\\ y=(x-2)^2,\end{cases}$得两曲线交点$(1,1)$.

取x为积分变量，$x\in[0,2]$，所求面积

$$A=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x-2)^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{2}{3}.$$

4. 用定积分求底圆半径为r，高为h的圆锥体的体积.

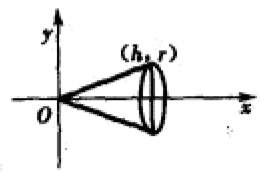


图 8-2

解　建立如图 8-2 坐标系，则圆锥体可看成是由直线$y=\frac{r}{h}x$，$x=h$及x轴所围成三角形绕x轴旋转一周而成，故圆锥体体积

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

5. 用定积分求由$y=x^2+1$，$y=0$，$x=1$，$x=0$所围平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

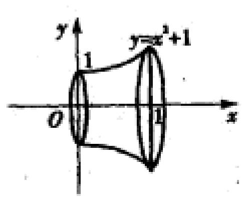


图 8-3

解　如图 8-3，所求体积

$$V=\int_0^1\pi(x^2+1)^2dx$$

$$= \pi\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{28}{15}\pi.$$

6. 求由曲线 $y^2 = 2x$ 与 $y^2 = (1-x)$ 所围图形的面积，如图 8-4 所示.

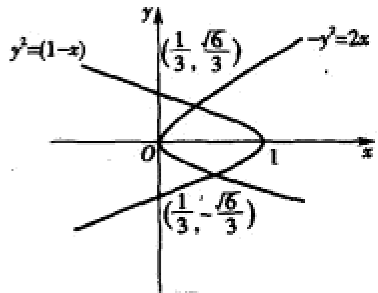


图 8-4

解　由 $\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y^2 = (1-x), \end{cases}$ 解得 $x = \frac{1}{3}, y = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，交点为 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

所围图形的面积

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left[(1-y^2) - \frac{1}{2}y^2\right]dy = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left[\left(1 - \frac{3}{2}y^2\right)\right]dy = \frac{4}{9}\sqrt{6}.$$

7. 求由曲线 $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1, x + y = 1$ 所围图形的面积.

解　由 $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1, \\ x + y = 1, \end{cases}$ 求得交点 $(0,1),(1,0)$. 所围图形的面积

$$A = \int_0^1 [1 - x - (1 - x^{\frac{1}{2}})^2]\,dx = \int_0^1 (2x^{\frac{1}{2}} - 2x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

8. 求以曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$ 及其渐近线为边界的平面图形的面积.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 0$，所以水平渐近线为 $y = 0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}} = \infty$，垂直渐近线为 $x = 0$. 所求面积为 $A = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\,dx = 2$.

9. 求由曲线 $\rho = 1, \rho = 2\cos\varphi$ 所围图形的面积（公共部分）.

解　由 $\begin{cases} \rho = 1, \\ \rho = 2\cos\varphi, \end{cases}$ 求得交点 $\left(1, -\frac{\pi}{3}\right), \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$. 由对称性，所求面积

$$A = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\varphi\,d\varphi\right] = 2\left[\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

10. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和点 $(3,0)$ 处的切线所围成的平面图形的面积，如图 8-5 所示.

解　因 $y'(0) = 4, y'(3) = -2$，所以曲线在 $(0, -3)$ 处的切线方程为 $y + 3 = 4x$，即 $y = 4x - 3$，曲线在 $(3,0)$ 处的切线方程为 $y = -2(x-3)$，即 $y = -2x + 6$.

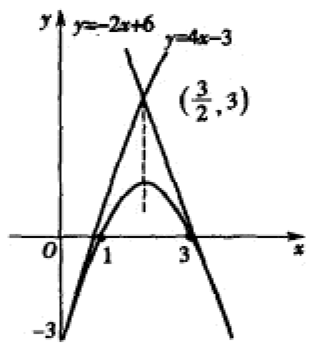


图 8-5

由$\begin{cases} y=4x-3, \\ y=-2x+6, \end{cases}$得两切线的交点$\left(\frac{3}{2},3\right)$,则所求面积

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3[-2x+6-(-x^2+4x-3)]\mathrm{d}x.$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^3(x^2-6x+9)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right)\Big|_{\frac{3}{2}}^3$$

$$=\frac{9}{4}.$$

11. 以椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$为底的柱体,被一个通过短轴与底面成$\alpha$角的平面所截,求截得部分的体积($a>b$).

解　过y轴上点y作垂直于y轴的截面,则截面为一直角三角形,其面积

$$A(y)=\frac{1}{2}x^2\tan\alpha=\frac{1}{2}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha,$$

所以　$$V=\int_{-b}^{b}A(y)\mathrm{d}y=\int_{-b}^{b}\frac{1}{2}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha\mathrm{d}y=\frac{2}{3}a^2b\tan\alpha.$$

12. 证明　由平面图形$0\leqslant a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)$绕$y$轴旋转所得旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

证明　体积微元$\mathrm{d}V=2\pi xf(x)\mathrm{d}x$,故

$$V=\int_a^b 2\pi xf(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

13. 求由$y=\sin x, x\in[0,\pi]$与x轴所围的图形分别(1)绕x轴,(2)绕y轴,(3)绕$y=1$,旋转所产生的旋转体体积.

解　(1) 绕x轴,$V_x=\pi\int_0^{\pi}y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}.$

(2) 绕y轴,$V_y=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2.$

(3) 积分变量选为 x,由对称性,积分区间取$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,体积元素为薄圆环

$$dV = \pi[1^2-(1-y)^2]dx,$$

体积为

$$V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1^2-(1-y)^2]dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2y-y^2)dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-\sin^2 x)dx = 4\pi-\frac{\pi^2}{2}.$$

14. 已知星形线的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}(a>0)$,试求:(1)它所围的面积;(2)它的弧长;(3)它绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 (1)根据图形的对称性,可得它所围的面积

$$A = 4\int_0^a y dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2[\sin^4 t-\sin^6 t]dt = 12a^2\left[\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{5}{6}\right)\right] = \frac{3\pi}{8}a^2.$$

(2) 它的弧长 $s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t dt = 6a.$

(3) $V = 2\int_0^a \pi y^2 dx = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t(1-\sin^2 t)dt = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

15. 曲线 $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$绕 x 轴旋转得一旋转体,若把旋转体位于 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的体积记为 $V(\xi)$. 试问 a 为多少时,$V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$.

解 $V(\xi) = \pi\int_0^{\xi}\frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\pi\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_0^{\xi} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+\xi^2}\right),$

$\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi) = \frac{\pi}{2}$,而 $V(a) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right),$

故 $$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right),$$

解得 $a=-1$(舍去),$a=1$.

16. 抛物线 $y=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ 通过点(0,0),当$0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y\geqslant 0$,且与直线 $x=1$,$y=0$ 围成的曲边三角形的面积等于 1,试决定 α,β,γ,使此曲边三角形绕 Ox 轴旋转所得旋转体体积最小.

解 因抛物线过原点. 则 $\gamma=0$,$A=\int_0^1(3\alpha x^2+2\beta x)dx = \alpha+\beta = 1.$

$$V_x = \pi\int_0^1(3\alpha x^2 + 2\beta x)^2 dx = \pi\left[\frac{2}{15}\beta^2 - \frac{3}{5}\beta + \frac{9}{5}\right],$$

令$\frac{dV}{d\beta} = 0$,得 $\pi\left(\frac{4}{15}\beta - \frac{3}{5}\right) = 0,\beta = \frac{9}{4}$.

由 $\alpha + \beta = 1,\alpha = 1 - \beta = -\frac{5}{4}$,则 $\alpha = -\frac{5}{4},\beta = \frac{9}{4},\gamma = 0$.

17. 证明曲线 $y = \sin x(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 的弧长等于椭圆 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的周长.

证明 设 $y = \sin x(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ 弧长为 s_1,则 $s_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \cos^2 x}dx$.

设椭圆周长为 s_2,椭圆方程 $x^2 + 2y^2 = 2$ 可化为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$,可知椭圆参数方程为 $x = \sqrt{2}\cos t,y = \sin t$,则 $s_2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2 t + \cos^2 t}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \sin^2 t}dt$.

令 $t = \frac{\pi}{2} - x$,则

$$s_2 = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}(-dx) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \cos^2 x}dx = s_1.$$

18. 已知两点 $A(a,0)$ 及 $B(0,a)$,弧$\widehat{AB}$为星形线 $x = a\cos^3 t,y = a\sin^3 t$ 的一段$(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$,试在弧$\widehat{AB}$上求点 M,使弧$\widehat{AM} = \frac{1}{4}$弧$\widehat{AB}$.

解 $\widehat{AB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3a\sin t\cos^2 t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt = \frac{3}{2}a.$$

设 M 点对应参数 $t = t_0$,则

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}a = \widehat{AM} = \int_0^{t_0}\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt = 3a\cdot\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{t_0} = 3a\frac{\sin^2 t_0}{2},$$

所以 $\frac{1}{4} = \sin^2 t_0$,解得 $t_0 = \frac{\pi}{6}$,故得 M 点的坐标为$\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a,\frac{a}{8}\right)$.

19. 求曲线 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}dt$ 的弧长.

解 因要 $\cos t \geqslant 0$,所以 $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$,即 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

$$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + y'^2}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + \cos x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}dx = 4.$$

二、定积分的物理应用与经济应用举例

1. 设一物体受连续的变力 $F(x)$ 作用,沿力的方向做直线运动,则物体从 $x = a$ 运

动到 $x=b$，变力所做的功为 $W=$______，其中______为变力 $F(x)$ 使物体由 $[a,b]$ 内的任一闭区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的左端点 x 到右端点 $x+\mathrm{d}x$ 所做功的近似值，也称其为______．

答： $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$，$F(x)\mathrm{d}x$；功的微元．

2. 如何计算铅直放置在液体中的曲边梯形薄板的侧压力？

答： 以液体深度 h 作为积分变量，利用同一深度处压强相等这一物理学知识，考虑深度层 $[h,h+\mathrm{d}h]$ 所对应的一层薄板所受压力的近似值，即得压力微元 $\mathrm{d}F$，将 $\mathrm{d}F$ 在曲边梯形薄板所处深度区间 $[a,b]$ 上积分，即得薄板所受侧压力．

3. 如何求一个密度不均匀分布的直杆的质量，试举例说明．

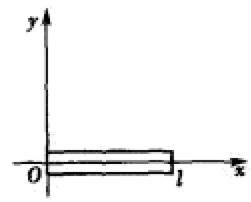


图 8-6

答： 如图 8-6 所示，设直杆位于 x 轴上的区间 $[0,l]$，$x\in[0,l]$ 对应的密度为 $\rho(x)$（不为常数），取 x 为积分变量，任取子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,l]$，对应直杆段的质量近似为

$$\mathrm{d}m=\rho(x)\mathrm{d}x,$$

于是所求直杆质量　$m=\int_0^l \rho(x)\mathrm{d}x$．

4. 一个底半径为 R m，高为 H m 的圆柱形水桶装满了水，要把桶内的水全部吸出，需要做多少功（水的密度为 10^3 kg/m^3，g 取 10 m/s^2）？

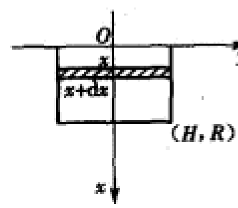


图 8-7

解　建立如图 8-7 所示坐标系．取 x 为积分变量，$x\in[0,H]$，任取子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,H]$，相应一薄层水被抽到桶外需做的功近似为

$$\mathrm{d}W=\pi R^2\mathrm{d}x\cdot\rho_{水}\,g\cdot x\ (\rho_{水}\text{ 为水的密度}),$$

于是，把桶内的水全部吸出，需做功

$$W=\int_0^H \rho_{水}\,g\pi R^2 x\mathrm{d}x=\rho_{水}\,g\pi R^2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^H$$

$$=\frac{1}{2}\rho_{水}\,g\pi R^2H^2$$

$$=5\,000\pi R^2H^2\,(\mathrm{J}).$$

5. 一边长为 a m 的正方形薄板垂直放入水中，使该薄板的上边距水面 1m，试求该薄板的一侧所受的水的压力（水的密度为 10^3 kg/m^3，g 取 10 m/s^2）．

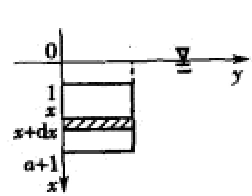


图 8-8

解　建立如图 8-8 所示坐标系，取 x 为积分变量 $x\in[1,a+1]$，任取子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[1,a+1]$ 相应一薄层薄板一侧所受的水的压力近似为

$$\mathrm{d}F=\rho_{水}\,gx\cdot a\cdot\mathrm{d}x,$$

于是，正方形薄板一侧所受的水的压力为

$$F=\int_1^{a+1}\rho_{水}gax\mathrm{d}x=\rho_{水}ga\frac{x^2}{2}\Big|_1^{a+1}$$

$$=5\,000a^2(a+2)(\mathrm{N}).$$

6. 有一半径为 R m 的半球形贮槽，其中盛满了水，把槽内全部水抽出需要做多少功？

解　功微元 $\mathrm{d}W=\pi y^2\mathrm{d}x\cdot x=\pi(R^2-x^2)x\mathrm{d}x$，

$$W=\int_0^R\pi x(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}R^4.$$

7. 一气缸的半径为 a cm，长为 l cm，其中充满气体，压强为 $p(\mathrm{kg/cm^2})$，如果温度保持固定，求推动活塞从开始位置到 $\frac{1}{3}l$ 处所做的功.

解　取活塞运动方向为 x 轴，活塞移动到 x 处的气体压强为 $p(x)$，气体的体积为 $V(x)=\pi(l-x)a^2$. 由物理定律，在恒温条件下，气体压强与气体体积的乘积为常数，所以

$$p(x)V(x)=p(0)V(0)=pl\pi a^2,p(x)=\frac{p(0)\cdot V(0)}{V(x)}=\frac{p\cdot l\pi a^2}{\pi(l-x)a^2}=\frac{lp}{l-x},$$

考虑活塞从 x 位移到 $x+\mathrm{d}x$ 所做的功 $\mathrm{d}W=p(x)\cdot\pi a^2\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2pl}{l-x}\mathrm{d}x$，于是活塞从 0 位移到 $\frac{1}{3}l$ 所做的功

$$W=\pi a^2pl\int_0^{\frac{l}{3}}\frac{1}{l-x}\mathrm{d}x=\pi a^2pl\ln\frac{3}{2}.$$

8. 半径为 a 的球深入水中，它与水面相切，球的比重为 1，求将球从水中取出需要做多少功？

解　取直径所在直线为 x 轴，方向向上，要计算把球心 O 点从 $(-a,0)$ 移到 $(a,0)$ 所做的功. 设球心移至 $(x,0)$ 处所需做的功为 $W(x)$，球所受的力 $F(x)$ 是方向向下的重力 F_1 以及方向向上的浮力 F_2 的合力，其重力 $F_1=\frac{4}{3}\pi a^3$，而

$$F_2=V(x)=\frac{4}{3}\pi a^3-\pi(a+x)^2\left[a-\frac{1}{3}(a+x)\right]=\frac{2}{3}\pi a^3-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3,$$

所以　$$F(x)=F_2-F_1=-\frac{2}{3}\pi a^3-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3,$$

在力 $F(x)$ 作用下，球心从 $(x,0)$ 位移到 $(x+\mathrm{d}x,0)$ 所做功的微元

$$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x=\left(-\frac{2}{3}\pi a^3-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3\right)\mathrm{d}x,$$

所以　$$W=\int_{-a}^{a}\left(-\frac{2}{3}\pi a^3-\pi a^2x+\frac{\pi}{3}x^3\right)\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}\pi a^4.$$

9. 一铅直倒立的等腰三角形水闸,其底为 a m,高位 h m,且底与水面相齐,求:(1)水闸一侧所受的压力;(2)作一水平线把此水闸分为上下两部分,使两部分所受压力相等.

解 (1)如图 8-9 所示,AB 的方程为:$\frac{h-x}{h}=\frac{y}{\frac{a}{2}}$,即

$$y=\frac{a}{2h}(h-x).$$

压力微元 $dp=\rho\cdot x\cdot 2y dx=\frac{ax\rho}{h}(h-x)dx$($\rho$ 为水的比重),

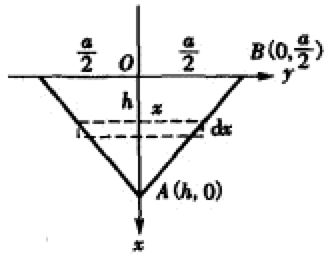


图 8-9

所以 $$p=\int_0^h\frac{ax\rho}{h}(h-x)dx=\frac{ah^2\rho}{6}.$$

(2)作一水平线 $x=b$,使得闸门上下两部分所受的压力相等,即

$$\int_0^b\frac{a\rho}{h}x(h-x)dx=\frac{p}{2}=\frac{ah^2\rho}{12},$$

而 $$\int_0^b\frac{a\rho}{h}x(h-x)dx=\frac{a\rho}{h}\left(\frac{1}{2}hx^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^b=\frac{a\rho}{h}\left(\frac{hb^2}{2}-\frac{b^3}{3}\right),$$

由 $\frac{a\rho}{h}\left(\frac{hb^2}{2}-\frac{b^3}{3}\right)=\frac{ah^2\rho}{12}$,解得 $b=\frac{h}{2}$,即等腰三角形水闸的中位线分上下两部分所受的压力相等.

10. 如图 8-10 所示,有一块等腰梯形板,上底为 4 m,下底为 10 m,高 10 m,将它铅直放在水中,设下底沉没于水面下面 20 m 处,求水对该板的压力.

解 AB 的方程为:$y=\frac{3}{10}x-1$,

压力微元 $dp=\rho(2ydx)x=2x\rho(\frac{3}{10}x-1)dx$,

所以 $$p=\rho\int_{10}^{20}2x\left(\frac{3}{10}x-1\right)dx=1\ 100\rho.$$

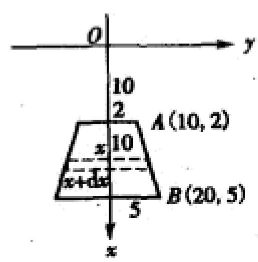


图 8-10

11. 设均匀细杆 AB 质量为 M,长度为 l,质量为 m 的质点 C 位于 AB 的延长线上,当质点 C 从距 B 点 r_1 处移至距 B 点 r_2 处($r_1>r_2$),求引力所做的功.

解 当 C 点坐标为 x_0 时,AB 杠对 C 点的引力为

$$F=-\int_0^l k\frac{Mm}{l(x_0-x)^2}dx=\frac{kMm}{l}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0-l}\right),$$

因而 $$W=\frac{kMm}{l}\int_{r_1+l}^{r_2+l}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0-l}\right)dx_0=\frac{kMm}{l}\ln\frac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}.$$

12. 计算函数 $y=2xe^{-x}$ 在区间$[0,2]$上的平均值.

解 $\bar{y}=\frac{1}{2}\int_0^2 2xe^{-x}dx=\int_0^2 xe^{-x}dx=-\int_0^2 xde^{-x}=-(xe^{-x}+e^{-x})\Big|_0^2=1-3e^{-2}.$

13. 已知交流电压 $U(t)=220\sqrt{2}\sin 100\pi t$，若电阻为 R，求在一个周期内电流通过 R 的平均功率.

解
$$\bar{P}=\frac{1}{2T}\int_0^T\frac{U^2(t)}{R}dt$$
$$=\frac{50}{R}\int_0^{\frac{1}{50}}[220\sqrt{2}\sin 100\pi t]^2dt=\frac{4\ 840\ 000}{R}\int_0^{\frac{1}{50}}\frac{1-\cos(200\pi t)}{2}dt$$
$$=\frac{48\ 400}{R}.$$

第九章　常微分方程解法

一、常微分方程的基本概念与分离变量法

1. 微分方程通解中的任意常数 C 最终可表为 e^{C_1}, $\sin C_2$(C_1, C_2为任意实数), $\ln C_3$(C_3 为实数, $C_3>0$)等形式吗?

答:不能表示为 e^{C_1}, $\sin C_2$,能表示为 $\ln C_3$,因为 e^{C_1}只能取到$(0,+\infty)$内的所有实数, $\sin C_2$只能取到$[-1,1]$内的实数,均不能取到所有实数,而 $\ln C_3\in(-\infty,+\infty)$.

2. 微分方程特解的图形是一条曲线(积分曲线),通解的图形是一族积分曲线,问通解中的积分曲线是否相互平行(注:两曲线平行是指两曲线在横坐标相等的点处切线斜率相同)?

答:不一定. 若通解的一阶导数中含有任意常数,则积分曲线不相互平行.

3. 验证 $y=C_1xe^{-x}+C_2e^{-x}$为微分方程 $y''+2y'+y=0$ 的解,并说明是该方程的通解.

证明　因 $y=C_1xe^{-x}+C_2e^{-x}$,所以 $y'=(C_1-C_2)e^{-x}-C_1xe^{-x}$,

$y''=(C_2-2C_1)e^{-x}+C_1xe^{-x}$,

于是 $y''+2y'+y=0$,故所给函数 y 是 $y''+2y'+y=0$ 的解.

因 xe^{-x}与 e^{-x}线性无关,所以所给函数中的 C_1与 C_2相互独立,即 y 中含有与方程 $y''+2y'+y=0$ 阶数相同(个数均为 2)的独立任意常数,故 y 是该方程的通解.

4. 用分离变量法求解下列微分方程:

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x^2y^2$;　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}$;　(3) $\dfrac{dy}{dx}=(1+x+x^2)y$,且 $y(0)=e$.

解　(1)分离变量得$\dfrac{dy}{y^2}=x^2dx$,两边积分得　$\displaystyle\int\frac{1}{y^2}dy=\int x^2dx$,求积分得 $-\dfrac{1}{y}=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{C}{3}$,从而通解为 $y=-\dfrac{3}{x^3+C}$, $y=0$ 也是方程的解.

(2)分离变量得　$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,两边积分得$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,求积分得 $\ln|y|=\arcsin x+C_1$,即 $y=\pm e^{C_1}e^{\arcsin x}=Ce^{\arcsin x}$($C=\pm e^{C_1}$),从而通解为 $y=Ce^{\arcsin x}$.

(3)分离变量得$\dfrac{dy}{y}=(1+x+x^2)dx$,两边积分得$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=\int(1+x+x^2)dx$,求积分得 $\ln|y|=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+C_1$,即 $y=\pm e^{C_1}e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}=Ce^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$($C=\pm e^{C_1}$),从而通解为 y

$=Ce^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$. 由 $y(0)=e$,得 $C=e$,故特解为 $y=e^{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程与初始条件：

(1)曲线在其上任一点的切线斜率等于该点横坐标的两倍,且通过点(1,4)；

(2)已知曲线过点(-1,1)且曲线上任一点的切线与 Ox 轴交点的横坐标等于切点的横坐标的平方.

解　(1)由题意,曲线满足的微分方程为:$y'=2x$,初始条件:$y|_{x=1}=4$.

(2)设曲线 $y=y(x)$,则在曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的切线方程:$Y-y=y'(X-x)$. 切线与 x 轴的交点:$\left(\frac{xy'-y}{y'},0\right)$,故曲线所满足的微分方程为:$\frac{xy'-y}{y'}=x^2$,初始条件为:$y|_{x=-1}=1$.

6. 判别下列一阶微分方程的类型,指出求解的方法(不必具体求解)：

(1)$\frac{dy}{dx}=-3x^2y$;　　(2)$x^2y\,dx-(x^3+y^3)dy=0$;

(3)$(x+1)\frac{dy}{dx}-xy=e^x(x+1)$;　　(4)$\frac{dy}{dx}-3xy-xy^2=0$;

(5)$(x^2+y^2)y'=2xy$;　　(6)$y'=\frac{y}{x+y^3}$;

(7)$dx=(y^3x^2+xy)dy$;　　(8)$\frac{dy}{dx}-\frac{e^{y^2+3x}}{y}=0$.

解　(1)$\frac{dy}{y}=-3x^2dx$,变量可分离方程.

(2)$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$,齐次方程.

(3)$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{x+1}y=e^x$,一阶线性方程.

(4)$\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$,伯努利方程.

(5)$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}$,齐次方程.

(6)$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=y^2$,以 y 为自变量,x 为未知函数的一阶线性方程.

(7)$\frac{dx}{dy}-yx=y^3x^2$,以 y 为自变量,x 为未知函数的伯努利方程.

(8)$ye^{-y^2}dy=e^{3x}dx$,变量可分离方程.

7. 求下列微分方程的通解.

(1) $x(y^2+1)\mathrm{d}x+y(x^2+1)\mathrm{d}y=0$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$;

(3) $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=2\mathrm{e}^{-y}$.

解 (1) 分离变量得 $\dfrac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}+\dfrac{y\mathrm{d}y}{y^2+1}=0$，两边积分：$\int\dfrac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int\dfrac{y\mathrm{d}y}{y^2+1}=C_1$. 即 $\ln(x^2+1)+\ln(y^2+1)=\ln C$. 故通解为 $(x^2+1)(y^2+1)=C$.

(2) 分离变量得 $\dfrac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}$. 积分得

$\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_1$. 即 $1+y^2=C\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(3) 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{2\mathrm{e}^{-y}-1}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$，即 $\dfrac{\mathrm{e}^y\mathrm{d}y}{2-\mathrm{e}^y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$. 积分得

$-\ln(2-\mathrm{e}^y)=\ln|x+1|-\ln|C_1|$，即 $(x+1)(2-\mathrm{e}^y)=C$.

8. 求下列方程满足初始条件的特解.

(1) $(x^2+1)y'=\arctan x, y(0)=0$;

(2) $y'\sin x=y\ln y, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}$;

(3) $y'\tan x+y=-3, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

解 (1) 分离变量得 $\mathrm{d}y=\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. 积分得 $y=\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

由 $y(0)=0$ 得 $C=0$，故满足条件的特解为 $y=\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2$.

(2) 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. 积分得 $\ln|\ln y|=\ln|\csc x-\cot x|+\ln C$.

即 $\ln y=C(\csc x-\cot x)$. 由 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}$ 得 $C=1$. 故特解为 $\ln y=\csc x-\cot x$.

(3) 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+3}=-\dfrac{\cos x}{\sin x}$. 积分得 $\ln|y+3|=-\ln|\sin x|+C_1$，即 $y+3=\dfrac{C}{\sin x}$. 由 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，得 $C=3$. 故特解为 $y=\dfrac{3}{\sin x}-3$.

二、一阶微分方程与可降阶的高阶微分方程

一阶线性微分方程分为一阶线性齐次微分方程和一阶线性非齐次微分方程. 形式为 $y'+p(x)y=0$ 的微分方程为一阶线性齐次微分方程，可以采用变量分离法求

解，也可以用公式 $y=Ce^{-\int p(x)dx}$（C 为任意常数）求解. 形式为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的微分方程为一阶线性非齐次微分方程，这种形式的微分方程可先求出其齐次方程的通解，再用常数变易法求出非齐次方程的通解.

可降阶的高阶微分方程有三种类型：

(1) $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程，直接积分 n 次即可得通解；

(2) $y''=f(x,y')$ 型的微分方程，先令 $y'=p(x)$ 将方程变为一阶微分方程 $p'(x)=f(x,p(x))$，求得通解后再解 $y'=p(x)$，即得原方程的通解；

(3) $y''=f(y,y')$ 型的微分方程，先令 $y'=p(y)$ 将方程变为一阶微分方程 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$，求得通解后再解 $y'=p(y)$，即得原方程的通解.

（一）一阶微分方程

1. 求解下列一阶线性微分方程：

(1) $y'+ay=b\sin x$（其中 a,b 为常数）；　(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y^2}$.

解　(1) 因 $p(x)=a,q(x)=b\sin x$，故通解为

$$y=e^{-\int adx}\left[C+\int b\sin x\cdot e^{\int adx}dx\right]=e^{-ax}\left(C+\int b\sin x\cdot e^{ax}dx\right)$$
$$=e^{-ax}\left[C+\frac{b}{a^2+1}e^{ax}(a\sin x-\cos x)\right].$$

(2) 方程变形为 $\dfrac{dx}{dy}-x=y^2$，这是 x 关于 y 的一阶线性微分方程，其中 $p(y)=-1,q(y)=y^2$，通解为

$$x=e^{-\int(-1)dy}\left[C+\int y^2\cdot e^{\int(-1)dy}\cdot dy\right]$$
$$=e^{y}\left[C+\int y^2\cdot e^{-y}dy\right]$$
$$=Ce^{y}-(y^2+2y+2).$$

2. 求下列微分方程的通解：

(1) $(x-2xy-y^2)dy+y^2dx=0$；　(2) $(x^2-y^2)dy-2xydx=0$；

(3) $x(1+x^2)dy=(y+x^2y-x^2)dx$；　(4) $y\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{2x}+\dfrac{x^2}{2}$.

解　(1) 方程可改写为 $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1-2y}{y^2}x=1$（以 y 为自变量的一阶线性方程），相应齐次方程通解为 $x=Cy^2e^{\frac{1}{y}}$. 常数变易，令 $x=u(y)y^2e^{\frac{1}{y}}$ 代入原方程得 $u'y^2e^{\frac{1}{y}}=1$，

$u=\int e^{-\frac{1}{y}}d\left(-\dfrac{1}{y}\right)=e^{-\frac{1}{y}}+C$. 故原方程的通解为 $x=(e^{-\frac{1}{y}}+C)y^2e^{\frac{1}{y}}$.

(2) 方程可改写为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}=\dfrac{2\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$，这是齐次方程. 令 $y=xu,\dfrac{dy}{dx}=u+$

$x\frac{du}{dx}$. 代入方程得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}$. 即 $\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{dx}{x}$,亦即 $\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dx}{x}$. 积分得 $\ln u-\ln(1+u^2)=\ln x+\ln C_1$. 从而得原方程的通解为 $x^2+y^2=Cy$.

(3)方程可改写为 $y'-\frac{y}{x}=-\frac{x}{1+x^2}$. 这是一阶线性方程,相应齐次方程通解为 $y=Cx$. 常数变易,令 $y=u(x)x$ 代入原方程得 $u'=\frac{-1}{1+x^2}$, $u=-\arctan x+C$. 故原方程的通解为 $y=(-\arctan x+C)x$.

(4)方程可改写为 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=\frac{x^2}{2}y^{-1}$. 这是伯努利方程. 令 $u=y^2$,则方程化为

$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=x^2$,这是一阶线性方程,相应齐次方程通解为 $u=Cx$. 常数变易,令 $u=u_1(x)x$ 代入原方程得:$u'_1=x$, $u_1=\frac{x^2}{2}+C$. 故通解为 $y^2=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)x$.

3. 求下列一阶方程满足初始条件的解:

(1) $(1-x^2)y'+xy=1$, $y|_{x=0}=1$;

(2) $y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$, $y|_{x=1}=1$;

(3) $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$, $y|_{x=0}=1$.

解　(1)方程可改写为 $y'+\frac{x}{1-x^2}y=\frac{1}{1-x^2}$. 这是一阶线性方程,相应齐次方程通解为 $y=C\sqrt{1-x^2}$. 常数变易,令 $y=u(x)\sqrt{1-x^2}$ 代入原方程得 $u'\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{1-x^2}$, $u=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 故通解为 $y=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C\right)\sqrt{1-x^2}$. 代入初始条件得 $C=1$,从而满足初始条件的特解为 $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

(2) 这是齐次方程,可改写为 $y'=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\frac{y}{x}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\frac{y}{x}-1}$. 令 $y=xu$,则:$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1}$,即 $\frac{-u^2-2u+1}{(u^2+1)(u+1)}du=\frac{dx}{x}$. 两边积分有 $\int\left[\frac{-2u}{1+u^2}+\frac{1}{u+1}\right]du=\int\frac{dx}{x}$.

解得 $\frac{u+1}{u^2+1}=Cx$,故 $\frac{x+y}{x^2+y^2}=C$. 代入初始条件得 $C=1$,所以方程特解为

$$x^2+y^2=x+y.$$

(3) 方程可改写为 $y'+\frac{y}{x+1}=-y^2$. 这是伯努利方程,令 $z=y^{-1}$,原方程化为

$-z'+\frac{z}{x+1}+1=0$,相应齐次方程解为 $z=C(x+1)$. 常数变易,令 $z=u(x)(x+1)$,代入相应线性方程 $u'(x)\cdot(x+1)=1$,$u=\ln(x+1)+C$,得原方程通解为 $\frac{1}{y}=[\ln(x+1)+C](x+1)$,代入初始条件求得 $C=1$,故方程满足初始条件的特解为

$$\frac{1}{y}=[\ln(x+1)+1](x+1).$$

4. 验证下列方程是全微分方程,并求出其通解:

(1) $(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y=0$;

(2) $(a^2-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y=0$;

(3) $e^y\mathrm{d}x+(xe^y-2y)\mathrm{d}y=0$.

解　(1) 因 $\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以是全微分方程. 取 $x_0=0,y_0=0$. 则

$$u(x,y)=\int_0^y y^2\mathrm{d}y+\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3.$$

所以原方程的通解为 $x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$.

(2) 因 $\frac{\partial P}{\partial y}=-2(x+y)=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以是全微分方程. 取 $x_0=0,y_0=0$. 则

$$u(x,y)=\int_0^x a^2\mathrm{d}x+\int_0^y-(x+y)^2\mathrm{d}y=a^2x-x^2y-xy^2+\frac{1}{3}y^3.$$

所以原方程的通解为 $a^2x-x^2y-xy^2+\frac{1}{3}y^3=C$.

(3) 因 $\frac{\partial P}{\partial y}=e^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以是全微分方程. 取 $x_0=0,y_0=0$. 则

$$u(x,y)=\int_0^y(-2y)\mathrm{d}y+\int_0^x e^y\mathrm{d}x=xe^y-y^2.$$

所以原方程的通解为 $xe^y-y^2=C$.

5. 通过适当的变换求下列方程的通解或特解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2+y^2+2xy}$;　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x-y)^2+1$;

(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$;　　(4) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x+\sin(x+y)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

解　(1) 方程可改写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2}$. 令 $x+y=u$,得 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\frac{1}{u^2}$,即 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{u^2}$. 分离变量得 $\frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. 积分得 $u-\arctan u=x+C$.

所以通解为 $y-\arctan(x+y)=C$.

(2)令 $x-y=u,1-\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$. 代入方程得 $1-\frac{du}{dx}=u^2+1$. 即 $-\frac{du}{u^2}=dx$. 积分得 $\frac{1}{u}=x+C$. 即 $\frac{1}{x+C}=x-y$.

(3)令 $xy=u,xy'+y=u'$. 代入方程得 $\frac{du}{dx}=\frac{u}{x}\ln u$. 分离变量得 $\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$. 积分得 $\ln u=Cx$. 故 $xy=e^{Cx}$.

(4)令 $x+y=u,1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}$ 代入方程得 $x\frac{du}{dx}+\sin u=0$. 分离变量得 $\frac{du}{\sin u}=-\frac{dx}{x}$. 积分得 $\frac{1-\cos u}{\sin u}=\frac{C}{x}$, 即 $\frac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{C}{x}$. 由 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 得 $C=\frac{\pi}{2}$. 所以方程之特解为 $\frac{1-\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{\pi}{2x}$.

6. 将温度为 T_0 的物体放在温度为 T_1 的空气中逐渐冷却($T_0>T_1$),由实验测定,物体在空气中冷却的速度与这一物体的温度和其周围空气的温度之差成正比,求任意时刻 t 物体的温度 $T(t)$.

解 根据题意,任意时刻物体的温度 $T(t)$ 满足方程: $\frac{dT}{dt}=-K(T-T_1)$,其中 $K>0$ 为比例系数,负号表示物体在空气中冷却. 初始条件为 $T|_{t=0}=T_0$. 即 $\begin{cases}\frac{dT}{dt}=-K(T-T_1),\\ T|_{t=0}=T_0,\end{cases}$ 分离变量 $\frac{dT}{T-T_1}=-Kdt$. 积分得 $T-T_1=Ce^{-Kt}$. 由初始条件 $T|_{t=0}=T_0$, 得 $C=T_0-T_1$. 故 $T(t)=(T_0-T_1)e^{-Kt}+T_1$.

7. 一曲线通过点 $A(0,1)$,且曲线上任意一点 $M(x,y)$ 处的切线在 y 轴上的截距等于原点至 M 点的距离,求这曲线方程.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$,则在任一点 $M(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$;即 $Y=\frac{dy}{dx}X+y-x\frac{dy}{dx}$. 由题意 $y-x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}$. 即 $\frac{y}{x}-\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. 这是齐次方程. 初始条件为 $y|_{x=0}=1$. 令 $y=xu$. 方程化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$. 积分得 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$. 代入初始条件得 $C=2$. 故所求曲线方程为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=2$.

8. 有连接 $A(0,1)$ 和 $B(1,0)$ 两点的向上凸的光滑曲线,点 $P(x,y)$ 为曲线上任一点,已知曲线与弦 AP 之间所夹面积为 x^3,求曲线方程.

解 设所求曲线 $y=y(x)$. 由题意,弧 $\overset{\frown}{AP}$ 与 x 轴构成的曲边梯形面积为 $\int_0^x y dx$.

记点 P 在 x 轴上的投影为点 E,则梯形 $OAPE$ 面积 $=\frac{1}{2}(y+1)x$. 由题意, $\int_0^x y dx$

$-\frac{x}{2}(y+1)=x^3$. 两边求导得 $y-\frac{1}{2}(y+1)-\frac{x}{2}y'=3x^2$，即 $y'-\frac{1}{x}y=-6x-\frac{1}{x}$.
初始条件 $y|_{x=1}=0$. 求解方程，由一阶线性方程解的公式有

$$y=Ce^{\int\frac{1}{x}dx}-e^{\int\frac{dx}{x}}\int\left(6x+\frac{1}{x}\right)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx=Cx-x\left(6x-\frac{1}{x}\right).$$

代入初始条件 $y|_{x=1}=0$ 得 $C=5$，所以曲线方程为 $y=5x-6x^2+1$.

（二）可降阶的高阶微分方程

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $y''=e^{2x}-\sin 2x$；　　(2) $y''=\frac{y'}{x}+x$；

(3) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$；　　(4) $yy''-2(y')^2=0$.

解　(1) 方程两端同时积分可得 $y'=\frac{1}{2}(e^{2x}+\cos 2x)+C_1$，再次积分可得

$$y=\frac{1}{4}(e^{2x}+\sin 2x)+C_1x+C_2.$$

(2) 方程不显含未知函数 y，令 $y'=p$，则 $y''=p'$. 代入方程得 $p'=\frac{p}{x}+x$. 即：$p'-\frac{p}{x}=x$. 这是一阶线性非齐次方程. 解出其通解为 $p=x(x+C_1)$，故原方程的通解为

$$y=\int x(x+C_1)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2.$$

(3) 方程不显含 y，令 $p=y'$，则 $y''=p'$. 代入方程得 $xp'=p\ln\frac{p}{x}$. 这是一个齐次方程. 令 $\frac{p}{x}=u$，即 $p=ux$，则 $p'=u+xu'$. 代入方程得 $u+xu'=u\ln u$.

分离变量得 $\frac{du}{u(-1+\ln u)}=\frac{dx}{x}$. 两边积分得 $\ln(-1+\ln u)=\ln x+\ln C_1$.

即 $-1+\ln u=C_1x$. 所以 $u=e^{C_1x+1}$，故 $\frac{p}{x}=e^{C_1x+1}$. 即 $y'=xe^{C_1x+1}$. 积分得

$$y=\frac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2,$$ 即为所求.

(4) 方程不显含自变量 x，令 $p=y'$ 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$. 代入方程得 $yp\frac{dp}{dy}-2p^2=0$. 即 $yp\frac{dp}{dy}=2p^2$. 分离变量得 $\frac{dp}{p}=\frac{2dy}{y}(p\neq 0,y\neq 0)$.

两边积分得 $\ln p=2\ln y+\ln C_1$；即 $p=C_1y^2$.

所以 $y'=C_1y^2$，即 $\frac{dy}{y^2}=C_1dx$. 两边积分得 $-\frac{1}{y}=C_1x+C_2$ 即为所求（又 $y=C$

也是方程的解).

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解:

(1) $(1+x^2)y''=2xy', y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$;

(2) $yy''+(y')^2=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

解 (1) 令 $y'=p$ 则 $y''=p'$. 代入方程得 $(1+x^2)p'=2xp$. 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2}$, 两边积分得 $\ln p=\ln(1+x^2)+\ln C_1$.

即 $y'=C_1(1+x^2)$. 积分得方程通解是 $y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$.

由初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$ 得 $C_1=3, C_2=1$.

故所求特解为 $y=x^3+3x+1$.

(2) **解一** 令 $y'=p$ 则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$. 当 $p\neq 0, y\neq 0$ 时分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}$. 所以 $p=\frac{C_1}{y}$, 即 $y'=\frac{C_1}{y}$. 所以 $y\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$.

故方程的通解为 $y^2=2C_1x+C_2$.

由初始条件 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=1, C_2=4$.

故所求特解为 $y^2=2x+4$.

解二 由方程得 $(yy')'=0$, 所以 $yy'=C_1$. 即 $y\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$.

积分得 $y^2=2C_1x+C_2$ 为方程的通解.

由初始条件可得所求特解为 $y^2=2x+4$.

3. 试求 $y''=x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y=\frac{x}{2}+1$ 相切的积分曲线.

解 由题意可知是要求方程 $y''=x$ 满足初始条件: $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解. 将方程 $y''=x$ 积分二次得其通解是 $y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$. 由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$. 由 $y'(0)=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$. 故 $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}+1$ 即为所求.

4. 在上半平面求一条向上凹的曲线, 使其上任一点 $P(x,y)$ 处曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(点 Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

解 设所求的曲线为 $y=y(x)$. 则此曲线在点 $P(x,y)$ 处的法线方程是: $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)(y'\neq 0)$. 它与 x 轴交点是 $(x+y'y,0)$. 故法线段 PQ 长度是

$\sqrt{(yy')^2+y^2}=y[1+(y')^2]^{\frac{1}{2}}$.

根据题意得微分方程$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$.

即 $yy''=1+y'^2$. 且当 $x=1$ 时,$y=1,y'=0$.

令 $y'=p$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$. 代入方程得 $yp\frac{dp}{dy}=1+p^2$,即$\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$.

积分得 $C_1y^2=1+p^2$. 又因为 $x=1$ 时,$y=1,y'=0$,即 $y=1$ 时 $p=0$,故有 $C_1=1$,得 $y^2=1+p^2$,即 $p=\pm\sqrt{y^2-1}$,$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$.

积分上式,由 $y|_{x=1}=1$ 得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x-1)$.

即所求曲线为 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm(x-1)}$,亦即 $y=\frac{1}{2}(e^{(x-1)}+e^{-(x-1)})$.

三、二阶常系数线性微分方程

二阶常系数线性微分方程也分为二阶常系数线性齐次微分方程和二阶常系数线性非齐次微分方程.

形式为 $y''+py'+qy=0$(p,q 均为常数)为二阶常系数线性齐次微分方程. 求解这种形式的微分方程可先求出微分方程的特征方程与特征根;再根据特征根的不同形式写出微分方程的通解.

对于微分方程 $y''+py'+qy=0$,其特征方程为 $r^2+pr+q=0$.

特征根为　$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

若 $r_1\neq r_2$,即特征方程有两个不相等的实数根时,微分方程的通解为

$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

若 $r_1=r_2$,即特征方程有两个相等的实数根时,微分方程通解为

$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$;

若 $r=\alpha\pm i\beta$ 是特征方程的共轭复根时,微分方程的通解为

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

形式为 $y''+py'+qy=f(x)$(p,q 均为常数)为二阶常系数线性非齐次微分方程.

求解这种形式的微分方程步骤:

(1)先求出微分方程的相应齐次方程的通解 $\bar{y}$;

(2)用待定系数法求解方程的一个特解 y^*;

(3)写出通解　$y=\bar{y}+y^*$;

(4)代入初始条件,求出所要求的特解(若没有此要求,则省略).

(一)二阶常系数线性齐次微分方程

1. 线性齐次常微分方程有何共性?

答:共性在于任一线性齐次常微分方程的任意多个解的叠加函数仍是这个方程

的解.

2. 写出以 $r^5+6r^3-2r^2+r+5=0$ 为特征方程的常微分方程.

解　对应的微分方程为 $y^{(5)}+6y^{(3)}-2y''+y'+5y=0$.

3. 写出以 $y=C_1e^{\frac{x}{3}}+C_2xe^{\frac{x}{3}}$ 为通解的微分方程.

解　此微分方程的特征方程应具有二重根 $r_1=r_2=\frac{1}{3}$,故特征方程为 $r^2-\frac{2}{3}r+\frac{1}{9}=0$,从而微分方程为 $y''-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{9}y=0$.

4. 写出下列微分方程的通解:

(1) $y''-2y'+y=0$;　　　　(2) $y'+8y=0$.

解　(1)特征方程 $r^2-2r+1=0$,特征根 $r_1=r_2=1$,通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$.

(2)特征方程 $r+8=0$,特征根 $r=-8$,通解为 $y=C_1e^{-8x}$.

5. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y''+2y'-6y=e^{-3x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

(2) $y''+2y=\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

解　(1)先解 $y''+2y'-6y=0$,其特征方程为 $r^2+2r-6=0$,
特征根为 $r_1=-1+\sqrt{7}$, $r_2=-1-\sqrt{7}$.

故通解 $\bar{y}=C_1e^{(-1+\sqrt{7})x}+C_2e^{(-1-\sqrt{7})x}$.

因 e^{-3x} 中 $\lambda=-3$ 不是特征方程的根,且 $P_m(x)=1$,故设原方程特解 $y^*=Ae^{-3x}$,代入原方程化简,得 $A=-\frac{1}{3}$,从而原方程通解为

$$y=C_1e^{(-1+\sqrt{7})x}+C_2e^{(-1-\sqrt{7})x}-\frac{1}{3}e^{-3x}.$$

由 $y(0)=0$,得 $C_1+C_2-\frac{1}{3}=0$.

由 $y'(0)=0$,得 $(-1+\sqrt{7})C_1-(1+\sqrt{7})C_2+1=1$,解得 $C_1=\frac{7+\sqrt{7}}{42}$, $C_2=\frac{7-\sqrt{7}}{42}$,

故所求特解 $y=\frac{7+\sqrt{7}}{42}e^{(-1+\sqrt{7})x}+\frac{7-\sqrt{7}}{42}e^{(-1-\sqrt{7})x}-\frac{1}{3}e^{-3x}$.

(2)先解 $y''+2y=0$,其特征方程为 $r^2+2=0$,特征根为 $r_1=\sqrt{2}i$, $r_2=-\sqrt{2}i$,故通解　$\bar{y}=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x$.

设原方程特解 $y^*=a\cos x+b\sin x$,代入原方程,化简得 $a=0$, $b=1$,故原方程通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x+\sin x,$$

由 $y(0)=0$　得 $C_1=0$，由 $y'(0)=1$，得 $C_2=0$，故所求特解为 $y=\sin x$.

6. 求下列常系数线性齐次微分方程的通解：

(1) $y''+y'-2y=0$；　　(2) $y''-4y'+4y=0$；

(3) $4y''-8y'+5y=0$.

解　(1) 特征方程为 $r^2+r-2=0$. 特征根：$r_1=-2, r_2=1$. 所以通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^x.$$

(2) 特征方程为 $r^2-4r+4=0$. 特征根 $r_1=r_2=2$. 所以通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x.$$

(3) 特征方程为 $4r^2-8r+5=0$. 特征根 $r_{1,2}=1\pm\frac{1}{2}i$. 所以通解为

$$y=e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right).$$

7. 求下列常系数线性齐次方程满足初始条件的特解：

(1) $y''-4y'+3y=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$；

(2) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$；

(3) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$.

解　(1) 特征方程为 $r^2-4r+3=0$. 特征根 $r_1=1, r_2=3$. 所以通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}, y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}.$$

由初始条件 $\begin{cases}C_1+C_2=6,\\C_1+3C_2=10,\end{cases}$ 解得 $C_1=4, C_2=2$，所以满足初始条件的特解为 $y=4e^x+2e^{3x}$.

(2) 特征方程为 $r^2+4r+29=0$. 特征根 $r_{1,2}=-2\pm5i$. 所以通解为

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x).$$

$$y'=e^{-2x}[(-2C_1+5C_2)\cos 5x+(-2C_2-5C_1)\sin 5x].$$

由初始条件得 $C_1=0, C_2=3$，故特解为 $y=3e^{-2x}\sin 5x$.

(3) 特征方程为 $4r^2+4r+1=0$. 特征根 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}$. 所以通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{2}x},$$

$$y'=\left(C_2-\frac{1}{2}C_1-\frac{C_2}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

由初始条件得 $C_1=2, C_2=1$，故方程之特解为 $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$.

8. 试求 $y''+9y=0$ 通过点 $M(\pi,-1)$ 且在该点与直线 $y+1=x-\pi$ 相切的积分曲线.

解　特征方程为 $r^2+9=0$. 特征根 $r_{1,2}=\pm3i$. 所以通解为 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. 由题意其初始条件为 $y|_{x=\pi}=-1, y'|_{x=\pi}=1$.

由通解和 $y' = -3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x$，得 $C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{3}$.

所以积分曲线为 $y = \cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

9. 某介质中一单位质点 M 受一力作用沿直线运动，该力与 M 点到中心 O 的距离成正比(比例系数是4)方向与 OM 相同，介质的阻力与运动的速度成正比(比例系数是3)方向与速度方向相反. 求该质点的运动规律(运动开始时，质点 M 静止，距中心 1 cm).

解 设所求运动规律为 $x = x(t)$，按题意可得 $\frac{d^2x}{dt^2} = 4x - 3\frac{dx}{dt}$，即 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0$，其初始条件是 $y|_{t=0} = 1, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

二阶常系数齐次线性微分方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0$ 的通解为 $x = C_1e^t + C_2e^{-4t}$.

由初始条件可知 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 4C_2 = 0, \end{cases}$ 解得 $C_1 = \frac{4}{5}, C_2 = \frac{1}{5}$. 因此所求运动规律为 $x = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t})$ (cm).

10. 已给某常系数二阶线性齐次方程的一个特解 $y = e^{mx}$，对应的特征方程的判别式等于零. 求这微分方程满足初始条件 $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

解 由题意知对应的特征方程有二重根 $r_1 = r_2 = m$，故方程的通解是

$$y = (C_1 + C_2x)e^{mx}.$$

由初始 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$ 得 $\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_1m + C_2 = 1, \end{cases}$ 故 $\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 1 - m. \end{cases}$

故满足初始条件的特解为 $y = [1 + (1-m)x]e^{mx}$.

11. 设微分方程 $y'' + 4y' + 13y = 0$ 的一个解 v 对应的曲线与方程 $y'' - 4y' + 29y = 0$ 的一个解 u 对应的曲线在原点相切. 若 $u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$，试确定 u 和 v.

解 由题意知求满足下列条件的 $u(x)$ 和 $v(x)$：$u(0) = 0, u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$；$v(0) = 0$ 且 $u'(0) = v'(0)$.

方程 $y'' + 4y' + 13y = 0$ 的通解是

$$y = v(x) = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

而 $y'' - 4y' + 29y = 0$ 的通解 $y = u(x) = e^{2x}(C_3\cos 5x + C_4\sin 5x)$.

由题设知 $u(0) = 0$，$u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$，代入 $u(x)$ 得 $C_3 = 0, C_4 = \frac{e^{-\pi}}{2}$.

所以 $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x-\pi}\sin 5x$ 即为所求.

对于 $y=v(x)=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$，由$v(0)=0$ 得 $C_1=0$.

于是 $y=v(x)=e^{-2x}C_2\sin 3x$，则 $v'(x)=C_2e^{-2x}(3\cos 3x-2\sin 3x)$，又由于 $u'(x)=\frac{1}{2}e^{2x-\pi}(2\sin 5x+5\cos 5x)$，$u'(0)=\frac{5}{2}e^{-\pi}$所以 $v'(0)=3C_2=\frac{5}{2}e^{-\pi}$，即得 $C_2=\frac{5}{6}e^{-\pi}$，故得 $v(x)=\frac{5}{6}e^{-2x-\pi}\sin 3x$.

（二）二阶常系数线性非齐次微分方程

1. 确定下列方程的特解 y^* 形式（不必定出常数）：

(1) $y''+y=(x-2)e^{3x}$；　(2) $y''+y=4x\sin x$；

(3) $y''-6y'=3x^2+1$；　(4) $y''-2y'+2y=xe^x\sin x$；

(5) $y''-2y'+y=xe^x$；　(6) $y''+y=e^x(\sin x+x\cos x)$；

(7) $y''-y=x\cos^2x$；　(8) $y''-y=\cos x\cos 3x$；

解　(1) 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm i$. 非齐次方程自由项$f(x)=(x-2)e^{3x}$，$\lambda=3$ 不是特征根，故 $y^*=e^{3x}(Ax+B)$.

(2) 对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，非齐次方程自由项$f(x)=4x\sin x$，$\lambda+\omega i=i$ 是特征根. 故

$$y^*=x[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x].$$

(3) 对应齐次方程的特征根为 $r_1=0$，$r_2=6$.

非齐次方程自由项$f(x)=3x^2+1$，$\lambda=0$ 是单特征根，故 $y^*=x(Ax^2+Bx+C)$.

(4) 对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=1\pm i$.

非齐次方程自由项$f(x)=xe^x\sin x$，$\lambda+\omega i=1+i$ 是特征根.

故 $y^*=xe^x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x]$.

(5) 对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=1$.

非齐次方程自由项$f(x)=xe^x$，$\lambda=1$ 是二重特征根.

故 $y^*=x^2e^x(Ax+B)$.

(6) 对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，非齐次方程自由项为$f(x)=e^x(\sin x+x\cos x)$，$\lambda+\omega i=1+i$ 不是特征根，故

$$y^*=e^x[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x].$$

(7) 对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=\pm 1$.

非齐次方程自由项$f(x)=x\cos^2x=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cos 2x=f_1(x)+f_2(x)$，

其中$f_1(x)=\frac{x}{2}$，$f_2(x)=\frac{x}{2}\cos 2x$.

对于 $y''-y=\frac{x}{2}$，$y_1^*=Ax+B$.

对于 $y''-y=\frac{x}{2}\cos 2x$，$y_2^*=(Cx+D)\cos 2x+(Ex+F)\sin 2x$.

故 $y^* = y_1^* + y_2^* = Ax + B + (Cx + D)\cos 2x + (Ex + F)\sin 2x.$

(8)对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2} = \pm 1$.

非齐次方程自由项 $f(x) = \cos x\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = f_1(x) + f_2(x)$.

其中 $f_1(x) = \frac{1}{2}\cos 4x, f_2(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$.

对于 $y'' - y = \frac{1}{2}\cos 4x, y_1^* = A\cos 4x + B\sin 4x$.

对于 $y'' - y = \frac{1}{2}\cos 2x, y_2^* = C\cos 2x + D\sin 2x$.

故 $y^* = y_1^* + y_2^* = A\cos 4x + B\sin 4x + C\cos 2x + D\sin 2x$.

2. 求下列方程的通解：

(1) $y'' + y' = x$；　　(2) $y'' - 4y' + 4y = 2\sin 2x$；

(3) $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$（其中 a 为实数）.

解 (1)对应齐次方程的特征根为 $r_1 = 0, r_2 = -1$，故对应齐次方程的通解 $\bar{y} = C_1 + C_2e^{-x}$.

自由项 $f(x) = x, \lambda = 0$ 是特征根，所以 $y^* = x(Ax + B)$.

代入方程解得 $A = \frac{1}{2}, B = -1$，得 $y^* = \frac{x^2}{2} - x$.

所以通解为 $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x$

(2)对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2} = 2$，故对应齐次方程通解为 $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{2x}$，自由项 $f(x) = 2\sin 2x, \lambda + \omega i = 2i$ 不是特征根，故 $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$. 代入方程解得 $A = \frac{1}{4}, B = 0$，所以 $y^* = \frac{1}{4}\cos 2x$. 所以方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{4}\cos 2x.$$

(3)对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2} = -2$，对应齐次方程通解 $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$. 自由项 $f(x) = e^{ax}$.

当 $a \neq -2$ 时，a 不是特征根，$y^* = Ae^{ax}$，代原方程解得 $A = \frac{1}{(a+2)^2}$. 故 $y^* = \frac{e^{ax}}{(a+2)^2}$.

当 $a = -2$ 时，a 是二重特征根，$y^* = Bx^2e^{ax}$，代入原方程得 $B = \frac{1}{2}$ 故 $y^* = \frac{x^2e^{ax}}{2}$，

故原方程通解为

$$y=\begin{cases}(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{(a+2)^2}, & a\neq -2,\\ \left(C_1+C_2x+\dfrac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-2x}, & a=-2.\end{cases}$$

3. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $y''-y'=3, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$;

(2) $y''-2y'=\mathrm{e}^x(x^2+x-3), y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=2$;

(3) $y''+4y=\sin 2x, y|_{x=0}=\dfrac{1}{4}, y'|_{x=0}=0$;

(4) 设 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x(x-u)\varphi(u)\mathrm{d}u$,其中 $\varphi(x)$ 为二阶可微分函数,求 $\varphi(x)$.

解 (1) 对应齐次方程的特征根为 $r_1=0, r_2=1$,故对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^x$. 自由项 $f(x)=3, \lambda=0$ 是特征根,所以 $y^*=Ax$. 代入方程解得 $A=-3$,所以 $y^*=-3x$. 故方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^x-3x$. 由初始条件得 $C_1+C_2=0, C_2-3=1$ 得 $C_1=-4, C_2=4$. 故方程满足初始条件的特解为 $y=-4+4\mathrm{e}^x-3x$.

(2) 对应齐次方程的特征根为 $r_1=0, r_2=2$,故对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1+C_2\mathrm{e}^{2x}$. 自由项 $f(x)=\mathrm{e}^x(x^2+x-3), \lambda=1$ 不是特征根. 所以方程特解为 $y^*=\mathrm{e}^x(Ax^2+Bx+C)$. 代入方程解得 $A=-1, B=-1, C=1$. 所以 $y^*=-\mathrm{e}^x(x^2+x-1)$,故方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x(x^2+x-1)$. 由初始条件得 $C_1+C_2+1=2, C_2=1$ 得 $C_1=0, C_2=1$. 故方程满足初始条件的特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x(x^2+x-1)$.

(3) 对应齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$,对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$, 自由项 $f(x)=\sin 2x, \lambda+\omega\mathrm{i}=2\mathrm{i}$ 是特征根. 所以方程特解为 $y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$. 代入方程解得 $A=-\dfrac{1}{4}, B=0$. 所以 $y^*=-\dfrac{x}{4}\cos 2x$. 故通解 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\dfrac{x}{4}\cos 2x$. 由初始条件可得 $C_1=\dfrac{1}{4}, C_2=\dfrac{1}{8}$. 故满足初始条件的特解为 $y=\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x-\dfrac{x}{4}\cos 2x$.

(4) $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-x\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u+\int_0^x u\varphi(u)\mathrm{d}u$.

求导得 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u-x\varphi(x)+x\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u$,再求导得 $\varphi''(x)=\mathrm{e}^x-\varphi(x)$. 即 $\varphi''(x)+\varphi(x)=\mathrm{e}^x$. 初始条件 $\varphi(0)=1, \varphi'(0)=1$. $\varphi''(x)+\varphi(x)=\mathrm{e}^x$ 的通解为 $\varphi(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$. 代入初始条件解得 $C_1=\dfrac{1}{2}$, $C_2=\dfrac{1}{2}$. 故 $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

4. 验证 $y_1=\mathrm{e}^{x^2}, y_2=x\mathrm{e}^{x^2}$ 是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解,并写出该方

程通解.

验证:将 $y_1=e^{x^2}$ 与 $y_2=xe^{x^2}$ 分别代入方程即得证(略). 又因 $\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}}=x\neq$ 常数,所以 $y_1=e^{x^2}$, $y_2=xe^{x^2}$ 线性无关. 方程的通解为 $y=C_1e^{x^2}+C_2xe^{x^2}$.

5. 设 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ 都是非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解(其中 $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ 为已知函数),且 $\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}\neq$ 常数,求证: $y(x)=(1-C_1-C_2)y_1(x)+C_1y_2(x)+C_2y_3(x)$ 是该方程的通解(C_1, C_2 为任意常数).

解 因 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ 都是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解. 由二阶线性非齐次方程通解的结构定理可知: $y_2(x)-y_1(x)$ 和 $y_3(x)-y_1(x)$ 皆为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 相应齐次方程的特解. 又因: $\frac{y_2(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_1(x)}\neq$ 常数,线性无关. 故通解为 $y=y_1+C_1(y_2(x)-y_1(x))+C_2(y_3(x)-y_1(x))$. 整理即得 $y=(1-C_1-C_2)y_1+C_1y_2(x)+C_2y_3(x)$.